

Plaquette 2 - Trigonométrie par l'exponentielle complexe

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois formules de base.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (\text{Moivre})$$

Technique de l'angle moitié (à connaître par cœur) :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i(a+b)/2} \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i(a+b)/2}$$

- **Linéariser** $\cos^p \theta \sin^q \theta$: remplacer par Euler, développer par le binôme, regrouper les termes conjugués $e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} = 2 \cos(k\theta)$.
- **Développer** $\cos(n\theta)$: partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ développé par le binôme.
- **Somme géométrique** : pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$; on factorise numérateur et dénominateur par l'angle moitié.
- **Intégrales** : pour $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 2\pi$ si $k = 0$, et 0 sinon.
- **Racines de l'unité** : $\omega = e^{2i\pi/n}$ vérifie $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$ et $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$.
- **Forme amplitude-phase** : $a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)$ avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $a + ib = R e^{i\varphi}$.

Correction de l'exercice 1 - Linéariser un cube

a) On part de la formule d'Euler et on développe par le binôme de Newton, $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$, avec $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{-i\theta}$ (on remarque que $uv = 1$) :

$$\cos^3 \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8} = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8}$$

- On regroupe les termes **conjugués** : $e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2 \cos 3\theta$ et $3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 6 \cos \theta$.
- D'où $\cos^3 \theta = \frac{2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}$.
- **Contrôle** en $\theta = 0$: $1 = \frac{1+3}{4} \checkmark$; en $\theta = \frac{\pi}{2}$: $0 = \frac{0+0}{4} \checkmark$

b) Même méthode, avec $(2i)^3 = -8i$ au dénominateur et des signes alternés :

$$\sin^3 \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{-8i} = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i}$$

- On regroupe : $e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} = 2i \sin 3\theta$ et $-3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = -6i \sin \theta$.
- D'où $\sin^3 \theta = \frac{2i \sin 3\theta - 6i \sin \theta}{-8i} = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}$.
- **Contrôle** en $\theta = \frac{\pi}{2}$: $1 = \frac{3 - (-1)}{4} \checkmark$

c) La linéarisation rend l'intégrale immédiate, car on sait primitiver $\cos(k\theta)$:

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 3\theta}{3} + 3 \sin \theta \right]_0^{\pi/2}$$

— En $\frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, donc le crochet vaut $-\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$; en 0 il vaut 0.

— Donc $I = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.

— Pour J , le changement de variable $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ échange $\sin$ et $\cos$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$J = I = \frac{2}{3} \text{ (on le retrouve avec b)} : \frac{1}{4} \left[-3 \cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left(0 - \left(-3 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{2}{3}.$$

— **Piège** : ne pas écrire $\sin^3$ au dénominateur 8 ; c'est $(2i)^3 = -8i$, et oublier le i donne un résultat imaginaire, signe d'une erreur.

Réponse. $\cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}$, $\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}$, $I = J = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 2 - Puissance quatrième et produit

a) Binôme à l'ordre 4 (coefficients 1, 4, 6, 4, 1), avec $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$:

$$\cos^4 \theta = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6}{16}$$

— Soit $\cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}$.

— **Contrôle** en $\theta = 0$: $\frac{1+4+3}{8} = 1$ ✓ ; en $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{1-4+3}{8} = 0$ ✓

b) *Première méthode.* $\sin \theta \cos \theta = \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}$ (produit des deux formules d'Euler), puis on élève au carré, avec $(4i)^2 = -16$:

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta}}{-16} = \frac{2 - 2 \cos 4\theta}{16} = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}$$

Seconde méthode. $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 2\theta}{4}$ et, par la formule $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ avec $u = 2\theta$, on retrouve $\frac{1 - \cos 4\theta}{8}$ ✓ Les deux méthodes concordent.

c) On intègre terme à terme. Sur $[0; \pi]$, $\int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi = 0$ et de même pour $\cos 4\theta$:

$$\int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{8} (0 + 0 + 3\pi) = \frac{3\pi}{8}$$

— Sur $[0; 2\pi]$, l'intégrale de $\cos 4\theta$ est nulle, d'où $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

— **Contrôle de vraisemblance** : $\cos^4$ est compris entre 0 et 1 et sa valeur moyenne sur $[0; \pi]$ vaut $\frac{3}{8}$, inférieure à la valeur moyenne $\frac{1}{2}$ de $\cos^2$: c'est cohérent, puisque $\cos^4 \leq \cos^2$.

— **À retenir** : seul le terme **constant** de la linéarisation survit à l'intégration sur une période entière.

Réponse. $\cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}$; $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}$; intégrales $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - Développer $\cos 5\theta$

a) Notons $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. D'après Moivre et le binôme :

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$$

- **Partie réelle** : $\cos 3\theta = c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4c^3 - 3c$.
- **Partie imaginaire** : $\sin 3\theta = 3c^2s - s^3 = 3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 4s^3$.
- On utilise à chaque fois $c^2 + s^2 = 1$ pour n'avoir qu'une seule fonction.

b) Le binôme à l'ordre 5 a pour coefficients 1, 5, 10, 10, 5, 1 ; seules les puissances **paires** de is sont réelles ($i^2 = -1$, $i^4 = 1$) :

$$\cos 5\theta = \operatorname{Re}(c + is)^5 = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$$

- On remplace $s^2 = 1 - c^2$ et $s^4 = (1 - c^2)^2 = 1 - 2c^2 + c^4$:
- $c^5 - 10c^3 + 10c^5 + 5c - 10c^3 + 5c^5 = 16c^5 - 20c^3 + 5c$.
- Donc $\cos 5\theta = 16c^5 - 20c^3 + 5c$. **Contrôle** en $\theta = 0$: $16 - 20 + 5 = 1$ ✓

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{10}$, on a $5\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $\cos 5\theta = 0$:

$$c(16c^4 - 20c^2 + 5) = 0$$

- Comme $c = \cos \frac{\pi}{10} > 0$, c'est $16c^4 - 20c^2 + 5 = 0$: c est racine de $16X^4 - 20X^2 + 5$.
- On pose $Y = c^2$: $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$, de discriminant $400 - 320 = 80$, d'où $Y = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.
- **Choix de la racine** : $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$, donc $c^2 > \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$. Or $\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \approx 0,35 < \frac{1}{2}$, et $\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \approx 0,90$. On garde $c^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$.
- **Conclusion** : $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \approx 0,951$ (la calculatrice donne 0,9511 ✓).
- **Méthode** : l'autre racine positive, $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \approx 0,588$, est $\cos \frac{3\pi}{10}$: elle vérifie aussi $\cos 5\theta = 0$. Toujours **justifier le tri** des racines par un encadrement.

Réponse. $\cos 3\theta = 4c^3 - 3c$, $\sin 3\theta = 3s - 4s^3$, $\cos 5\theta = 16c^5 - 20c^3 + 5c$, $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

Correction de l'exercice 4 - Le pentagone régulier

a) $\omega \neq 1$ et $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$. La somme géométrique de raison ω donne :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0$$

b) Comme $|\omega| = 1$, on a $\omega^4 = \omega^{-1} = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$. Donc :

- $u = \omega + \overline{\omega} = 2\operatorname{Re} \omega = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$;
- $v = \omega^2 + \overline{\omega^2} = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.
- **Somme** : $u + v = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$ d'après a).
- **Produit** : $uv = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$. Avec $\omega^5 = 1$, $\omega^6 = \omega$ et $\omega^7 = \omega^2$, donc $uv = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$.

c) u et v ont pour somme -1 et pour produit -1 : ce sont les racines de

$$X^2 - (u + v)X + uv = X^2 + X - 1$$

- Les racines sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

- **Attribution** : $\frac{2\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $u = 2 \cos \frac{2\pi}{5} > 0$; c'est la racine positive.
- Donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0,309$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,809$.
- **Contrôle** : $\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1 = 2 \times \frac{6-2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}-8}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \checkmark$
- **Conséquence géométrique** : le côté du pentagone inscrit dans le cercle unité vaut $|1 - \omega| = 2 \sin \frac{\pi}{5}$, et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le **nombre d'or**, apparaît comme $-2 \cos \frac{4\pi}{5}$: c'est le rapport diagonale / côté du pentagone.

Réponse. $u + v = uv = -1$; $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Correction de l'exercice 5 - Somme de cosinus en progression

a) Par la formule de Moivre, $\cos(k\theta) + i \sin(k\theta) = (e^{i\theta})^k$. Donc $C_n + iS_n$ est une somme géométrique de raison $q = e^{i\theta}$, et $q \neq 1$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

b) On factorise chaque terme par l'exponentielle de l'**angle moitié**, ce qui fait apparaître un sinus :

- $1 - e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n+1)\theta/2} (e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}) = -2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2} e^{i(n+1)\theta/2}$;
- de même $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$, non nul car $\frac{\theta}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$.
- Le quotient se simplifie ($-2i$ disparaît, les exponentielles se divisent) :

$$C_n + iS_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{in\theta/2}$$

— Le facteur devant l'exponentielle est **réel** : on prend parties réelle et imaginaire.

$$C_n = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad S_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

c) Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, chaque $\cos(k\theta)$ vaut 1 et chaque $\sin(k\theta)$ vaut 0 : $C_n = n+1$ et $S_n = 0$. La figure montre ce pic de hauteur $n+1 = 6$ pour $n = 5$.

— **Vérification** pour $n = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$: directement, $C_2 = 1 + 0 - 1 = 0$ et $S_2 = 0 + 1 + 0 = 1$.

— Par les formules : $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ donne $C_2 = 0 \checkmark$, et $S_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \checkmark$

— **Piège** : ne pas prendre la partie réelle du numérateur et du dénominateur séparément : $\operatorname{Re} \frac{a}{b} \neq \frac{\operatorname{Re} a}{\operatorname{Re} b}$. C'est précisément pour cela qu'on factorise d'abord.

Réponse. $C_n = \frac{\cos(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, $S_n = \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$; $C_n = n+1$, $S_n = 0$ si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 6 - Somme avec coefficients binomiaux

a) Par Moivre, $\cos(k\theta) + i \sin(k\theta) = (e^{i\theta})^k$. La formule du binôme, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, avec $x = e^{i\theta}$, donne :

$$A_n + iB_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n$$

b) Angle moitié : $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$. On élève à la puissance n :

$$A_n + iB_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{in\theta/2}$$

— Le facteur $2^n \cos^n \frac{\theta}{2}$ est **réel**, donc :

— $A_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}$ et $B_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}$.

— **Contrôle** $\theta = 0$: $A_n = 2^n = \sum \binom{n}{k}$ ✓ (somme des coefficients binomiaux) et $B_n = 0$ ✓

c) Directement, les cosinus de $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ valent $1, 0, -1, 0, 1$:

— $\binom{4}{0} - \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 - 6 + 1 = -4$.

— Par la formule, $\theta = \frac{\pi}{2}$: $2^4 \cos^4 \frac{\pi}{4} \cos \pi = 16 \times \frac{1}{4} \times (-1) = -4$ ✓ (car

$$\cos^4 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{4}.$$

— **Remarque** : le module de $1 + e^{i\theta}$ est $2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$, pas $2 \cos \frac{\theta}{2}$: si $\cos \frac{\theta}{2} < 0$, l'écriture de b) n'est **pas** une forme exponentielle (module négatif), mais le calcul des parties réelle et imaginaire reste juste, car il ne demande qu'un facteur réel.

Réponse. $A_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}$, $B_n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}$; pour $n = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$: -4 .

Correction de l'exercice 7 - Forme amplitude-phase

a) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$, et $\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\pi/6}$.

b) On développe $R \cos(x - \varphi)$ par la formule d'addition :

$$R \cos(x - \varphi) = R \cos \varphi \cos x + R \sin \varphi \sin x$$

— Identifier avec $\sqrt{3} \cos x + \sin x$ demande $R \cos \varphi = \sqrt{3}$ et $R \sin \varphi = 1$, c'est-à-dire $Re^{i\varphi} = \sqrt{3} + i$.

— D'après a) : $R = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Donc $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$.

c) L'équation devient $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$. Or $\cos A = \cos B \Leftrightarrow A \equiv \pm B [2\pi]$:

— $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donne $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$;

— $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donne $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$.

— Dans $[0; 2\pi[$: $x = \frac{5\pi}{12}$ et $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}$.

— **Vérification** en $\frac{5\pi}{12}$: $2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ✓ Les deux points sont **symétriques** par rapport à la droite d'angle $\frac{\pi}{6}$ sur le cercle.

d) Comme $\cos$ prend toutes les valeurs de $[-1; 1]$, la fonction varie entre -2 et 2 :

— **maximum** 2 quand $x - \frac{\pi}{6} \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$;

— **minimum** -2 quand $x = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

— **Interprétation** : en physique, $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ est l'**amplitude** du signal et φ son **déphasage** ; l'amplitude n'est jamais $a + b$ ($\sqrt{3} + 1 \approx 2,73$ serait faux).

Réponse. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; solutions $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{23\pi}{12}$; extrêmes ± 2 en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$ (modulo 2π).

Correction de l'exercice 8 - Superposition de signaux

a) $e^{i\alpha}e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + \alpha)} = \cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)$. En multipliant par le réel A et en prenant la partie réelle :

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(Ae^{i\alpha}e^{i\omega t})$$

— La partie réelle est **additive** : $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1 + z_2)$. Donc la somme de deux signaux est $\operatorname{Re}((Z_1 + Z_2)e^{i\omega t})$: son amplitude complexe est $Z_1 + Z_2$.

b) Les amplitudes complexes sont $Z_1 = 2$ et $Z_2 = 2e^{2i\pi/3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

$$U = Z_1 + Z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

— Donc $u(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$: l'amplitude reste 2 et la phase est la **moyenne** des deux phases.

— **Autre méthode** (angle moitié) : $Z_1 + Z_2 = 2\left(1 + e^{2i\pi/3}\right) = 2 \times 2 \cos \frac{\pi}{3} e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi/3} \checkmark$

— **Géométrie** (figure) : le parallélogramme construit sur deux vecteurs de longueur 2 faisant un angle de 120° est un **losange** formé de deux triangles équilatéraux ; sa diagonale mesure donc 2 .

c) L'amplitude complexe de la somme est $1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = 1 + j + j^2$, avec $j = e^{2i\pi/3}$.

— C'est la somme des trois racines cubiques de l'unité, nulle car $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$.

— Le signal somme a une amplitude complexe nulle : il est **identiquement nul**.

— **Sens physique** : dans un réseau triphasé équilibré, le fil neutre ne transporte aucun courant.

Réponse. $u(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$; la somme triphasée est nulle car $1 + j + j^2 = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Équation trigonométrique

a) On part de $e^{ia} + e^{ib}$ et on factorise par l'exponentielle de la demi-somme :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$$

— La partie réelle du membre de gauche est $\cos a + \cos b$; celle du membre de droite est $2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ (le premier facteur est réel). D'où la formule.

b) On regroupe les termes extrêmes, $a = 3x$ et $b = x$: $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$.
Donc :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1)$$

— **Contrôle** en $x = 0$: gauche 3 , droite $1 \times 3 = 3 \checkmark$

c) Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est.

$$- \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$- 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

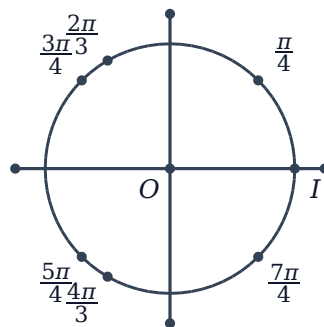
$$- \textbf{Ensemble des solutions} : \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$- \textbf{Dans } [0; 2\pi[: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ (sommets d'un carré) et } \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} : \text{ six solutions.}$$

$$- \textbf{Vérification} \text{ en } x = \frac{2\pi}{3} : -\frac{1}{2} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos 2\pi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \checkmark$$

- **Méthode** : regrouper les termes **symétriques** autour du terme central (x et $3x$ autour de $2x$) fait apparaître le facteur commun.

Réponse. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; six solutions dans $[0; 2\pi[$.



Les six solutions de (E) dans $[0; 2\pi[$.

Correction de l'exercice 10 - Produit de sinus

a) Les n nombres ω^k ($0 \leq k \leq n-1$) sont **distincts** (arguments $\frac{2k\pi}{n}$ distincts dans $[0; 2\pi[$) et sont racines de $X^n - 1$. Un polynôme unitaire de degré n ayant n racines distinctes est le produit des $X - \text{racine}$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

- Par ailleurs $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$. Le facteur $k = 0$ est $X - 1$; comme $\mathbb{C}[X]$ est intègre, on simplifie par $X - 1$:

$$- \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) = 1 + X + \dots + X^{n-1}.$$

b) On évalue en $X = 1$: le membre de droite vaut $1 + 1 + \dots + 1 = n$ (n termes). Donc $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

c) Angle moitié :

$$1 - e^{i\alpha} = e^{i\alpha/2} (e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}) = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha/2}$$

- Donc $|1 - e^{i\alpha}| = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, car $\frac{\alpha}{2} \in [0; \pi]$ où le sinus est positif.

- On passe au **module** dans b) : $\prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = n$, avec $\alpha = \frac{2k\pi}{n} \in [0; 2\pi[$.

- Il y a $n-1$ facteurs 2, d'où $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d) Pour $n = 3$: $\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} \checkmark$

— Pour $n = 6$: $\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = \frac{6}{2^5} \checkmark$

— **Géométrie** : $|1 - \omega^k|$ est la longueur de la corde joignant 1 à ω^k . Pour l'hexagone : 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$, 1, dont le produit vaut $1 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 6 \checkmark$ Le produit des distances d'un sommet d'un n -gone régulier inscrit dans le cercle unité aux autres sommets vaut n .

Réponse. $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Correction de l'exercice 11 - Polynômes de Tchebychev

a) Avec $\cos u = \operatorname{Re} e^{iu}$:

$$e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} = e^{ia} (e^{ib} + e^{-ib}) = 2 \cos b e^{ia}$$

— Parties réelles : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos b \cos a$.

b) Récurrence **double** : on démontre $P(n)$: « $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout θ » et on suppose $P(n-1)$ et $P(n)$ vraies.

— **Initialisation** : $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos 0$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$: $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

— **Hérédité** : soit $n \geq 1$ tel que $P(n-1)$ et $P(n)$. Par définition puis par a) avec $a = n\theta$, $b = \theta$:

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

— **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence simple ne suffirait pas : la relation fait intervenir **deux** rangs précédents.

c) On applique la relation de récurrence :

— $T_2 = 2X \cdot X - 1 = 2X^2 - 1$ (on retrouve $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$) ;

— $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$, identique à $\cos 3\theta = 4c^3 - 3c \checkmark$;

— $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

— **Contrôle** : $T_4(1) = 8 - 8 + 1 = 1 = \cos 0 \checkmark$; $T_4(0) = 1 = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \checkmark$

d) $T_n(\cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pour $\theta \in]0; \pi[$, on obtient $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.

— Les $x_k = \cos \theta_k$ sont **distincts**, car $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$, et appartiennent à $] -1; 1[$ car $\theta_k \in]0; \pi[$.

— On a trouvé n racines distinctes d'un polynôme de degré n (le coefficient dominant 2^{n-1} se voit par récurrence) : ce sont **toutes** les racines, et elles sont **simples**.

— Pour $n = 4$: $\cos \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{7\pi}{8}$, soit environ $\pm 0,924$ et $\pm 0,383$, les points marqués sur la figure.

Réponse. $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$; racines de T_n : $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Correction de l'exercice 12 - Formule de tan 3θ

a) $\cos \theta (1 + i \tan \theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, donc $1 + it = \frac{e^{i\theta}}{\cos \theta}$. Par Moivre :

$$(1 + it)^3 = \frac{e^{3i\theta}}{\cos^3 \theta} = \frac{\cos 3\theta + i \sin 3\theta}{\cos^3 \theta}$$

b) On développe le membre de gauche par le binôme ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$) :

$$- (1 + it)^3 = 1 + 3it - 3t^2 - it^3 = (1 - 3t^2) + i(3t - t^3).$$

— **Identification** des parties réelles et imaginaires (le facteur $\frac{1}{\cos^3 \theta}$ est réel) :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta (1 - 3t^2) \text{ et } \sin 3\theta = \cos^3 \theta (3t - t^3).$$

— Comme $\cos 3\theta \neq 0$, on a $1 - 3t^2 \neq 0$ et, en divisant :

$$\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

— **Contrôle** : $\theta = \frac{\pi}{12}$ donne $\tan \frac{\pi}{4} = 1$; avec $t = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$, $\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \approx \frac{0,785}{0,785} = 1 \checkmark$

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{9}$: $\cos \frac{\pi}{9} \neq 0$ et $3\theta = \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \neq 0$. Donc avec $t = \tan \frac{\pi}{9}$:

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

— On chasse le dénominateur : $3t - t^3 = \sqrt{3} - 3\sqrt{3}t^2$, soit $t^3 - 3\sqrt{3}t^2 - 3t + \sqrt{3} = 0$.

— Donc $\tan \frac{\pi}{9}$ est racine de P . **Contrôle numérique** : $t \approx 0,36397$ donne

$$P(t) \approx 0,0482 - 0,6883 - 1,0919 + 1,7321 \approx 0 \checkmark$$

— **Remarque** : les deux autres racines de P sont $\tan \frac{4\pi}{9}$ et $\tan \frac{7\pi}{9}$, qui vérifient aussi $\tan 3\theta = \sqrt{3}$.

Réponse. $\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$; $\tan \frac{\pi}{9}$ est racine de $X^3 - 3\sqrt{3}X^2 - 3X + \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Formules de Machin

Rappel utile : un complexe $a + ib$ avec $a > 0$ a pour argument principal est $\arctan \frac{b}{a} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Et l'argument d'un produit est la somme des arguments **modulo** 2π :

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$$

a) $(2 + i)(3 + i) = 6 + 2i + 3i + i^2 = 5 + 5i$, d'argument $\frac{\pi}{4}$.

— Donc $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

— **Encadrement** : chaque $\arctan$ est dans $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$ (car $\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{1}{3} < 1$), donc la somme est dans $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, intervalle de longueur $< 2\pi$ qui ne contient qu'un réel congru à $\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}$ lui-même. L'égalité est exacte.

b) $(5 + i)^2 = 25 + 10i - 1 = 24 + 10i$, puis $(24 + 10i)^2 = 576 + 480i - 100 = 476 + 480i$.

$$- (476 + 480i)(239 - i) = 476 \times 239 - 476i + 480 \times 239i + 480.$$

— Partie réelle : $113\,764 + 480 = 114\,244$; partie imaginaire : $114\,720 - 476 = 114\,244$.

$$(5 + i)^4(239 - i) = 114\,244(1 + i)$$

c) Les arguments : $\arg(5 + i) = \arctan \frac{1}{5}$ et $\arg(239 - i) = -\arctan \frac{1}{239}$. Donc

$$- 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \equiv \arg(114\,244(1 + i)) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

- **Encadrement** : $0 < \arctan \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$ donne $0 < 4 \arctan \frac{1}{5} < \pi$, et $0 < \arctan \frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$. La différence est dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \pi \right[$, intervalle de longueur $\frac{3\pi}{2} < 2\pi$.
- Le seul réel de cet intervalle congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π est $\frac{\pi}{4}$: la formule est démontrée.
- **Contrôle numérique** : $4 \times 0,197396 - 0,004184 = 0,785398 \approx \frac{\pi}{4}$ ✓
- **Intérêt** : $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$ converge très vite pour $x = \frac{1}{5}$ et $x = \frac{1}{239}$; Machin a calculé 100 décimales de π en 1706 avec cette formule.

Réponse. $(2+i)(3+i) = 5+5i$; $(5+i)^4(239-i) = 114\,244(1+i)$; d'où $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

Correction de l'exercice 14 - Puissance en triphasé

a) $e^{i\theta_k} = e^{ia}\omega^k$ avec $\omega = e^{2i\pi/n} \neq 1$. La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta_k} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = e^{ia} \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$$

— La partie réelle donne $\sum \cos \theta_k = 0$ (et la partie imaginaire $\sum \sin \theta_k = 0$).

b) On linéarise : $\cos^2 \theta_k = \frac{1 + \cos 2\theta_k}{2}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \theta_k = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(2a + \frac{4k\pi}{n} \right)$$

— La dernière somme est la partie réelle de $e^{2ia} \sum_k (\omega^2)^k$.

— Si $n \geq 3$, $\omega^2 = e^{4i\pi/n} \neq 1$ (car $\frac{4\pi}{n} \in]0; 2\pi[$), et $(\omega^2)^n = 1$: la somme géométrique est nulle. Il reste $\frac{n}{2}$.

— Si $n = 2$: $\omega^2 = 1$ et la somme vaut $2 \cos 2a$; on trouve $\cos^2 a + \cos^2(a + \pi) = 2 \cos^2 a$, qui **n'est pas** constant. D'où l'hypothèse $n \geq 3$.

c) Ici $\theta_k = \omega t - \frac{2k\pi}{3}$; changer k en $-k$ (modulo 3) ne change pas l'ensemble des angles, donc b) s'applique avec $a = \omega t$ et $n = 3$:

$$p(t) = 2RI^2 \sum_{k=0}^2 \cos^2 \theta_k = 2RI^2 \times \frac{3}{2} = 3RI^2$$

— La puissance ne dépend pas de t : elle est **constante**, égale à trois fois la puissance moyenne RI^2 d'une phase.

— **Intérêt physique** : en monophasé, $p(t) = 2RI^2 \cos^2(\omega t)$ oscille entre 0 et $2RI^2$ à la fréquence 2ω , d'où des vibrations ; le triphasé délivre un couple régulier. C'est l'une des raisons de son usage industriel.

Réponse. $\sum \cos \theta_k = 0$, $\sum \cos^2 \theta_k = \frac{n}{2}$ ($n \geq 3$) ; $p(t) = 3RI^2$, constante.

Correction de l'exercice 15 - Intégrales de Wallis paires

a) Si $m = 0$, l'intégrande vaut 1 et l'intégrale vaut 2π . Si $m \neq 0$, $\theta \mapsto \frac{e^{im\theta}}{im}$ est une primitive (dérivée d'une exponentielle complexe) :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2im\pi} - 1}{im} = 0$$

b) Avec $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et le binôme :

$$\cos^{2n} \theta = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ik\theta} e^{-i(2n-k)\theta} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(2k-2n)\theta}$$

(on a utilisé $2^{2n} = 4^n$).

c) On intègre la **somme finie** terme à terme (linéarité de l'intégrale). D'après a), seul le terme où l'exposant $2k - 2n$ est nul survit, c'est-à-dire $k = n$:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \times 2\pi$$

d) Vérifications :

- $n = 1$: $\frac{2\pi}{4} \times 2 = \pi$; or $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \pi$ ✓
- $n = 2$: $\frac{2\pi}{16} \times 6 = \frac{3\pi}{8}$, soit deux fois $\frac{3\pi}{8}$, la valeur trouvée sur $[0; \pi]$ dans l'exercice « Puissance quatrième et produit » (par périodicité et parité, l'intégrale sur $[0; 2\pi]$ est le double) ✓
- **Puissances impaires** : $\cos^{2n+1} \theta = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_k \binom{2n+1}{k} e^{i(2k-2n-1)\theta}$, et l'exposant $2k - 2n - 1$ est **impair**, donc jamais nul : l'intégrale est **nulle**. On le voit aussi par la symétrie $\theta \mapsto \pi - \theta$, qui change $\cos$ en $-\cos$.
- **À retenir** : sur une période, l'intégrale d'un polynôme trigonométrique est 2π fois son **coefficient constant**.

Réponse. $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$; l'intégrale de $\cos^{2n+1}$ est nulle.

Correction de l'exercice 16 - Somme de sinus et encadrement

a) La somme commence à $k = 1$: on factorise $e^{i\theta}$ avant d'appliquer la formule géométrique ($e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \in]0; \pi[$) :

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{\sin \frac{n\theta}{2} e^{in\theta/2}}{\sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}}$$

- (Angle moitié : $1 - e^{ix} = -2i \sin \frac{x}{2} e^{ix/2}$ au numérateur et au dénominateur ; les $-2i$ se simplifient.)
- L'exponentielle restante est $e^{i(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2})} = e^{i(n+1)\theta/2}$, et le facteur devant est réel.
- La **partie imaginaire** donne $\sigma_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

b) Un sinus est compris entre -1 et 1 , donc le numérateur est de valeur absolue ≤ 1 ; le dénominateur est **strictement positif** car $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$|\sigma_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

- La borne ne dépend **pas** de n . Ce résultat est la clé du **critère d'Abel** : $\sum \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge.

c) Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2\pi = 0$.

— Directement : $\sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$.

— Formule pour $n = 1$: $\frac{\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ ; pour $n = 2$: $\sin \pi = 0$ au numérateur ✓ ; pour $n = 3$: $\sin 2\pi = 0$ ✓

— La borne de b) vaut $\frac{1}{\sin(\pi/3)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

d) La suite $(\sin(k\theta))_k$ est périodique de période 3 : $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots$. Donc σ_n prend les valeurs $\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \dots$

— La sous-suite $\sigma_{3m+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et la sous-suite $\sigma_{3m} = 0$ ont des limites **différentes** : (σ_n) diverge, bien qu'elle soit bornée.

— **Leçon** : borné ne veut pas dire convergent ; il suffit d'exhiber deux sous-suites de limites différentes pour prouver la divergence.

Réponse. $\sigma_n = \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, $|\sigma_n| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)}$; pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0$ en boucle, pas de limite.