

Plaquette 3 – Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$: méthodes et relations

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$ se traite avec une boîte d'outils précise : **discriminant complexe** et racine carrée par le système des trois équations, **changement d'inconnue** ($Z = z^2$, $Z = z^3$, $w = z + \frac{1}{z}$), recherche d'une racine **imaginaire pure** ou **évidente** puis factorisation, **relations entre coefficients et racines**, et passage à la forme exponentielle pour les puissances. On termine par la méthode de **Cardan** et par la localisation des racines.

Exercice 1 – Discriminant complexe

On considère l'équation $(E) : z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

- Calculer le discriminant Δ de (E) .
- Déterminer les racines carrées complexes de Δ sous forme algébrique.
- Résoudre (E) et vérifier le résultat par les relations entre coefficients et racines.

Exercice 2 – Équation bicarrée

On veut résoudre $(E) : z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

- On pose $Z = z^2$. Résoudre l'équation obtenue en Z et écrire ses solutions sous forme exponentielle.
- En déduire les quatre solutions de (E) , sous forme exponentielle puis algébrique.
- Factoriser $z^4 - 2z^2 + 4$ en produit de deux trinômes du second degré à **coefficients réels**, et vérifier en développant.

Exercice 3 – Racine imaginaire pure

Soit $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i$.

- Montrer que P admet une racine imaginaire pure iy (y réel), que l'on déterminera.
- Déterminer les complexes a et b tels que $P(z) = (z - iy)(z^2 + az + b)$.
- Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 - Relations coefficients-racines

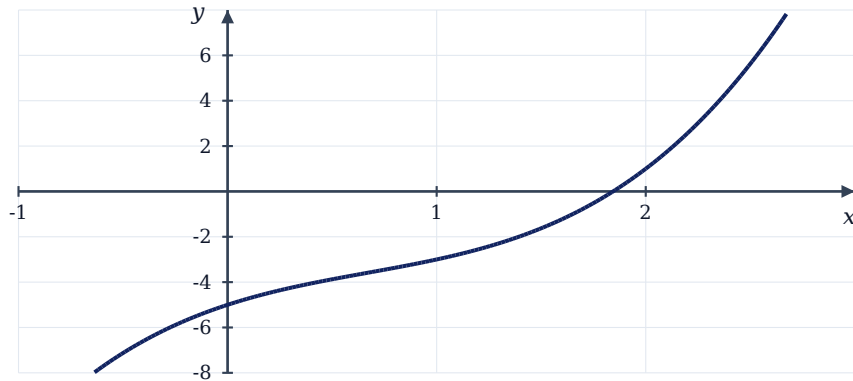
Soient x_1, x_2, x_3 les racines complexes (comptées avec multiplicité) de $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 5$. On ne cherche pas à les calculer.

a) Donner $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

b) Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

c) Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en utilisant $P(x_i) = 0$.

d) La figure montre la courbe de $x \mapsto P(x)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer, sans la figure, que P n'a pas trois racines réelles.



La courbe de P sur $[-1; 3]$: une seule intersection avec l'axe des abscisses.

Exercice 5 - Égalité de deux puissances n-ièmes

Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On considère $(E_n) : (z + 1)^n = (z - 1)^n$.

a) Montrer que (E_n) est une équation polynomiale de degré $n - 1$ et que 1 n'en est pas solution.

b) Montrer que z est solution si et seulement si $\frac{z+1}{z-1} = \omega^k$ pour un $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

c) En déduire que les solutions sont les $z_k = -i \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, $1 \leq k \leq n-1$; en particulier elles sont toutes imaginaires pures.

d) Vérifier pour $n = 3$ en résolvant directement.

Exercice 6 - Racines neuvièmes primitives

On considère $Q(z) = z^6 + z^3 + 1$.

a) Vérifier que $z^9 - 1 = (z^3 - 1)Q(z)$.

b) En posant $Z = z^3$, résoudre $Q(z) = 0$ et donner les six solutions sous forme exponentielle.

c) Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ en trois trinômes du second degré.

d) En déduire $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0$.

Exercice 7 – Racine double d'un trinôme cubique

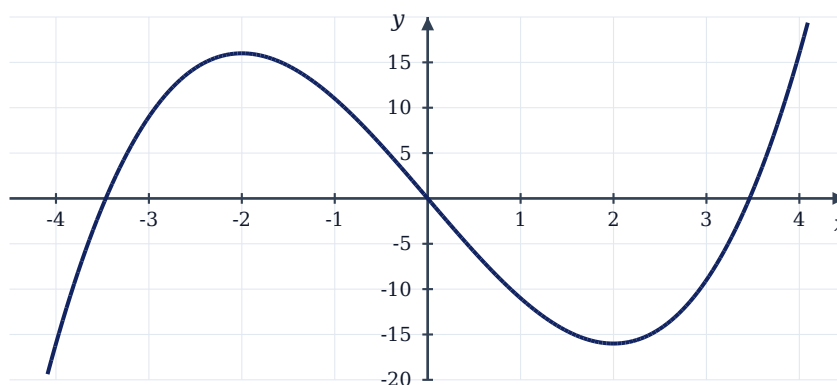
Soient $p \neq 0$ et q deux complexes, et $P = X^3 + pX + q$.

a) Justifier que α est racine au moins double de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

b) Montrer que P admet une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$, et que cette racine vaut alors $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

c) Application : déterminer les réels q pour lesquels $X^3 - 12X + q$ a une racine double, et factoriser P dans chaque cas.

d) Interpréter c) sur la figure.



La courbe de $x \mapsto x^3 - 12x$: ajouter q la translate verticalement.

Exercice 8 – Coefficients réels et racines conjuguées

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$.

a) Démontrer que si un polynôme P est à coefficients **réels** et $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.

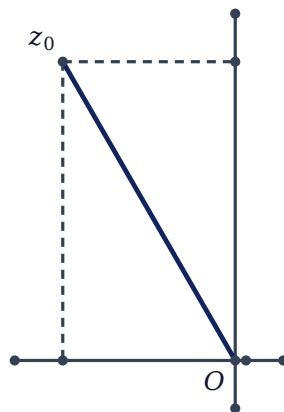
b) Vérifier que $1 + i$ est racine de P . En déduire une autre racine sans calcul.

c) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9 - Racines cinquièmes d'un complexe

On pose $z_0 = -16 + 16\sqrt{3}i$.

- Écrire z_0 sous forme exponentielle.
- Résoudre $z^5 = z_0$; on donnera les solutions $w_0, \dots, w_4$ sous forme exponentielle, avec des arguments dans $[0; 2\pi[$.
- L'une des solutions a une forme algébrique simple : laquelle ? La donner.
- Calculer, sans les développer, la somme et le produit des cinq solutions.

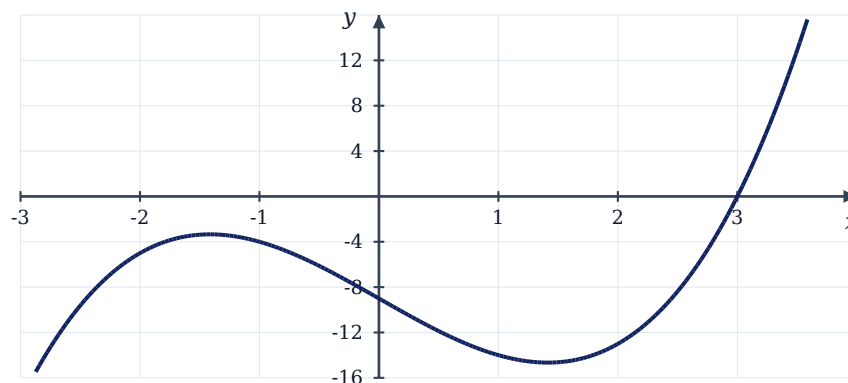


Le point d'affixe $z_0 = -16 + 16\sqrt{3}i$.

Exercice 10 - Méthode de Cardan

On veut résoudre (E) : $x^3 - 6x - 9 = 0$.

- On cherche une solution sous la forme $x = u + v$. Montrer que $(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3$, et en déduire qu'il suffit que $uv = 2$ et $u^3 + v^3 = 9$.
- Montrer que u^3 et v^3 sont alors les racines de $T^2 - 9T + 8 = 0$, et trouver une solution réelle de (E).
- En utilisant $j = e^{2i\pi/3}$, obtenir les deux autres solutions, puis les vérifier par une factorisation.



La courbe de $x \mapsto x^3 - 6x - 9$: une seule racine réelle.

Exercice 11 - Filtre des racines de l'unité

Soit $n \geq 2$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut n si n divise p , et 0 sinon.

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Avec $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que
 $(1+1)^m + (1+j)^m + (1+j^2)^m = 3 \sum_{0 \leq 3\ell \leq m} \binom{m}{3\ell}$.

c) En déduire $\sum_{0 \leq 3\ell \leq m} \binom{m}{3\ell} = \frac{2^m + 2 \cos \frac{m\pi}{3}}{3}$.

d) Vérifier pour $m = 3$ et $m = 6$ en calculant directement.

Exercice 12 - Localiser les racines

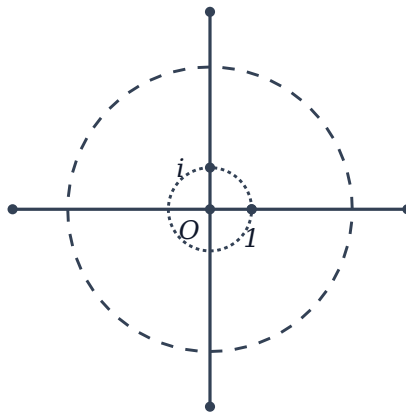
Soit $P = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes, et $M = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$.

a) Soit z une racine de P avec $|z| > 1$. Montrer que $|z|^n \leq M|z|^{n-1}$.

b) En déduire que toute racine de P vérifie $|z| \leq \max(1, M)$.

c) Application : montrer que les racines de $z^3 - 2z + 1 + i$ sont dans le disque de centre O et de rayon $2 + \sqrt{2}$.

d) Montrer que toutes les racines de $z^4 + \frac{z}{4} + \frac{i}{4}$ sont dans le disque unité fermé.



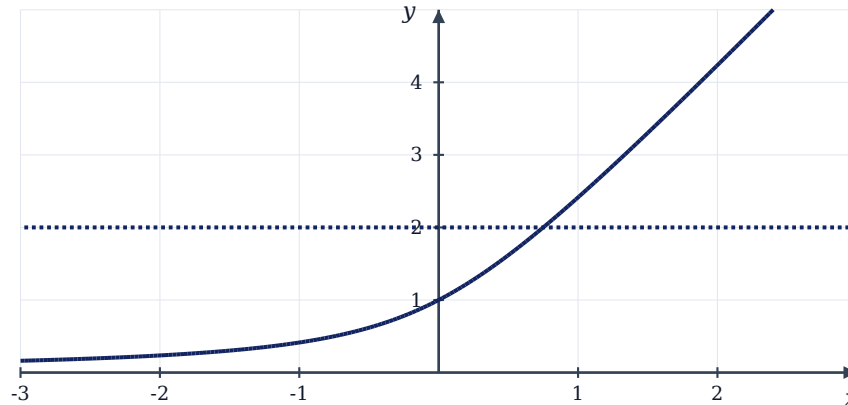
Le disque unité et le disque de rayon $2 + \sqrt{2}$.

Exercice 13 - Équations avec module et conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les trois équations suivantes, qui ne sont pas polynomiales en z .

- a) $|z| + z = 2 + i$.
- b) $z|z| = -4i$.
- c) $z^2 + |z|^2 = 1 + i$.

La figure illustre la question a) : on y cherche l'intersection de la courbe $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + x$ avec la droite $y = 2$.



La courbe $y = \sqrt{x^2 + 1} + x$ (strictement croissante) et la droite $y = 2$.

Exercice 14 - Une équation en tangentes

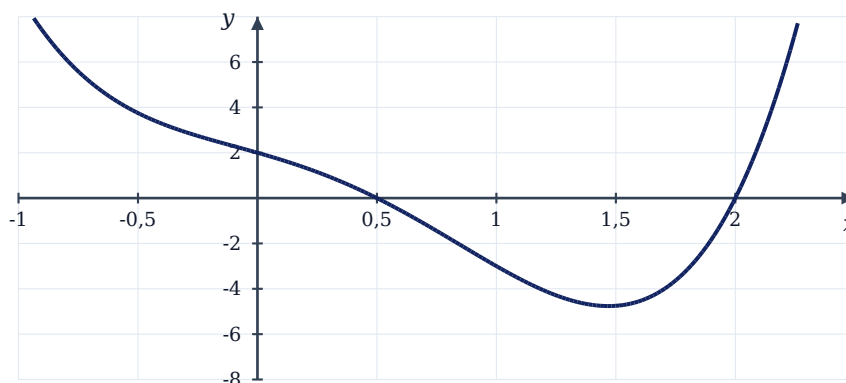
Soit $n \geq 1$ et $a \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. On considère (E) : $\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = \frac{1 + i \tan a}{1 - i \tan a}$, pour $z \neq -i$.

- a) Montrer que pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = e^{2i\theta}$.
- b) Posons $w = \frac{1 + iz}{1 - iz}$. Montrer que $w \neq -1$ et exprimer z en fonction de w .
- c) Résoudre (E) : montrer que ses solutions sont les réels $\tan \frac{a + k\pi}{n}$, pour les $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $\frac{a + k\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.
- d) Cas $n = 2$, $a = 0$: résoudre directement et comparer.

Exercice 15 – Synthèse : une équation réciproque

On veut résoudre $(E) : 2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2 = 0$.

- Vérifier que 0 n'est pas solution et que si z est solution, $\frac{1}{z}$ l'est aussi.
- Diviser (E) par z^2 et poser $w = z + \frac{1}{z}$. Montrer que $z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2$, puis que (E) équivaut à $2w^2 - 3w - 5 = 0$.
- Résoudre en w , puis en z .
- Factoriser le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et contrôler avec la figure.



La courbe de $x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ sur $[-1 ; 2,5]$.