

Plaquette 5 - Exponentielle complexe, fonctions et problèmes de synthèse

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

L'exponentielle complexe $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ prolonge l'exponentielle réelle : elle transforme les sommes en produits, n'est **pas injective** ($2i\pi$ -périodique) et ne s'annule jamais. Elle sert à **dériver et intégrer** des fonctions trigonométriques (partie réelle de $t \mapsto e^{(a+ib)t}$), à **modéliser** oscillations, spirales et rotations, et à relier les complexes à l'**algèbre** (matrices de similitude, groupes de racines de l'unité). Les derniers exercices mêlent toutes les techniques du chapitre.

Exercice 1 - Équations exponentielles

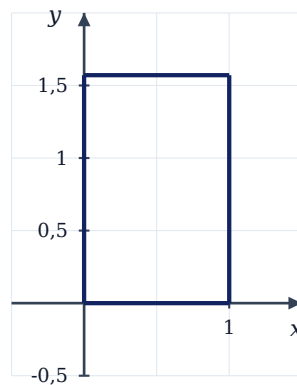
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- $e^z = 1 + i\sqrt{3}$;
- $e^z = -1$, puis $e^z = 0$;
- $e^{2z} - 3e^z + 2 = 0$;
- Montrer que $z \mapsto e^z$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$, mais qu'elle l'est sur la bande $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$.

Exercice 2 - Image d'un rectangle par l'exponentielle

On note $E: z \mapsto e^z$.

- Déterminer l'image par E d'une droite verticale $\operatorname{Re} z = a$, puis d'une droite horizontale $\operatorname{Im} z = b$.
- En déduire l'image du rectangle $R = \left\{x + iy : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ représenté ci-dessous.
- Calculer l'aire de R et celle de $E(R)$.
- Quelle est l'image de la bande $\{z : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$?



Le rectangle $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 - Intégrer par l'exponentielle complexe

- a) Justifier que $t \mapsto e^{(1+i)t}$ a pour dérivée $t \mapsto (1+i)e^{(1+i)t}$.
- b) Calculer $I = \int_0^\pi e^t \cos t \, dt$ et $J = \int_0^\pi e^t \sin t \, dt$ en calculant $I + iJ$.
- c) En déduire une primitive de $x \mapsto e^x \sin x$ et la vérifier en dérivant.
- d) Retrouver I par deux intégrations par parties et comparer l'effort.

Exercice 4 - Orthogonalité des cosinus

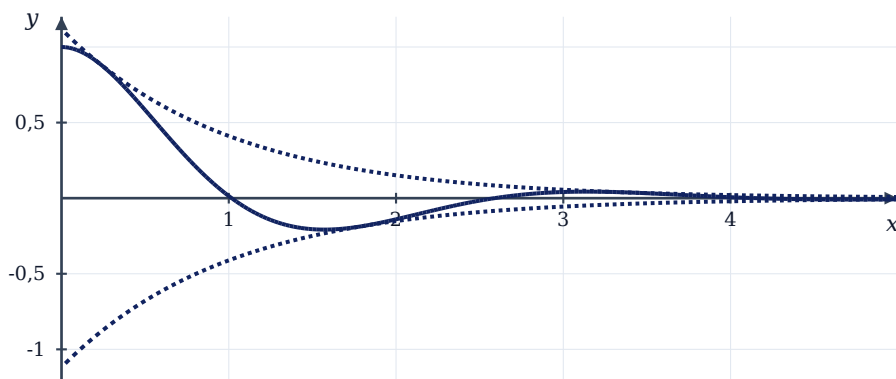
Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

- a) Montrer que $\cos(mt) \cos(nt) = \frac{1}{4} (e^{i(m+n)t} + e^{-i(m+n)t} + e^{i(m-n)t} + e^{-i(m-n)t})$.
- b) En déduire $\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt$ selon que $m = n$ ou $m \neq n$.
- c) Calculer de même $\int_0^{2\pi} \sin(mt) \cos(nt) \, dt$.
- d) Application : on sait que $f(t) = 3 \cos t - 2 \cos 3t + 5 \cos 4t$. Retrouver le coefficient de $\cos 3t$ par le calcul de $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(3t) \, dt$.

Exercice 5 - Oscillateur amorti

On considère l'équation $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$, qui modélise un ressort amorti.

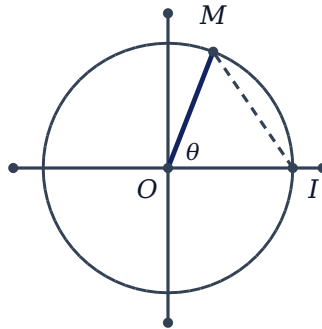
- a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $f: t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution (à valeurs complexes) si et seulement si $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Résoudre cette équation.
- b) En déduire que $t \mapsto e^{-t} \cos 2t$ et $t \mapsto e^{-t} \sin 2t$ sont solutions réelles de (E) .
- c) On admet que les solutions réelles sont les $y = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$. Déterminer celle qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- d) Écrire cette solution sous la forme $R e^{-t} \cos(2t - \varphi)$ et interpréter la figure.



La solution cherchée en c) et, en pointillés, son enveloppe $\pm R e^{-t}$.

Exercice 6 – Corde et arc

- a) Montrer que pour tout réel θ , $|e^{i\theta} - 1| = 2\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|$.
- b) En admettant $|\sin u| \leq |u|$ pour tout réel u , en déduire $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$. Interpréter sur la figure.
- c) Montrer que pour tous réels a et b , $|e^{ia} - e^{ib}| \leq |a - b|$.
- d) Application : on approche $e^{i0,01}$ par 1. Majorer l'erreur commise ; puis montrer que $|e^{i\theta} - 1 - i\theta| \leq \frac{\theta^2}{2}$ en écrivant $e^{i\theta} - 1 - i\theta = \int_0^\theta i(e^{it} - 1)dt$.

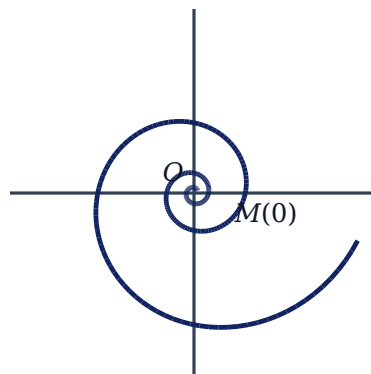


La corde $[IM]$ (en pointillés) et l'arc de cercle de I à M , de longueur θ .

Exercice 7 – La spirale logarithmique

Soit $a > 0$ et $\gamma(t) = e^{(a+i)t}$ pour $t \in \mathbb{R}$: le point $M(t)$ d'affixe $\gamma(t)$ décrit une spirale.

- a) Donner le module et un argument de $\gamma(t)$. Comment évolue la distance $OM(t)$ quand t augmente de 2π ?
- b) Calculer $\gamma'(t)$ et montrer que l'angle entre $\overline{OM}$ et le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est constant ; donner sa valeur.
- c) Calculer la longueur de l'arc $\int_{-\infty}^0 |\gamma'(t)| dt$ parcouru avant d'arriver en $M(0)$.
- d) Application numérique avec $a = 0,2$.



La spirale $t \mapsto e^{(0,2+i)t}$ pour $-12 \leq t \leq 6$.

Exercice 8 - Matrices de similitude

Pour $z = a + ib$ (a, b réels), on pose $M(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $J = M(i)$.

- Montrer que $M(z)$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de l'application $w \mapsto zw$ (identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).
- Montrer que $M(z)M(z') = M(zz')$ et $M(z) + M(z') = M(z + z')$. Calculer J^2 .
- Calculer $\det M(z)$ et en déduire que $M(z)$ est inversible si et seulement si $z \neq 0$; exprimer $M(z)^{-1}$.
- Calculer $M(1 + i)^8$ sans multiplier de matrices.

Exercice 9 - Le groupe des racines de l'unité

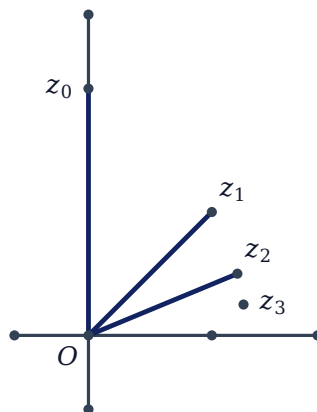
Pour $n \geq 1$, on note $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ et $U = \{z : |z| = 1\}$.

- Montrer que U est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et que U_n est un sous-groupe de U .
- Montrer que $U_n = \langle \omega^k : 0 \leq k \leq n-1 \rangle$ avec $\omega = e^{2\pi i/n}$ (le groupe est **cyclique**).
- Soient $m, n \geq 1$ et $d = \text{pgcd}(m, n)$. Montrer que $U_m \cap U_n = U_d$.
- Déterminer $U_{12} \cap U_{18}$ et le vérifier sur les arguments.

Exercice 10 - Une suite qui converge vers $4/\pi$

Soit $z_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0; \pi[$. On définit $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

- Montrer que $z_1 = r \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ (angle moitié).
- Montrer par récurrence que $z_n = r \left(\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} \right) e^{i\theta/2^n}$.
- Montrer que $\sin \theta = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$ et en déduire que (z_n) converge vers $\frac{r \sin \theta}{\theta}$.
- Cas $z_0 = 2i$: calculer z_1, z_2 , la limite, et interpréter la figure.



Les premiers termes pour $z_0 = 2i$: ils se rapprochent de l'axe réel.

Exercice 11 - Dérivées successives

Soit $f(x) = e^x \cos x$.

a) Montrer que $f = \operatorname{Re} g$ avec $g(x) = e^{(1+i)x}$, et que $f^{(n)} = \operatorname{Re} g^{(n)}$.

b) En déduire que $f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

c) Vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$ par un calcul direct.

d) Calculer $f^{(8)}(0)$ et $f^{(10)}(0)$.

Exercice 12 - Moyenne sur le cercle et formule de Parseval

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polynôme à coefficients complexes.

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) d\theta = a_0 = P(0)$.

b) Montrer que $\left|P(e^{i\theta})\right|^2 = \sum_{j,k} a_j \bar{a}_k e^{i(j-k)\theta}$, puis la **formule de Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n |a_k|^2$$

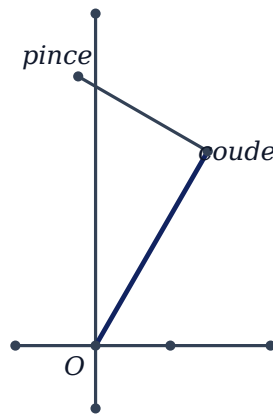
c) En déduire que $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq \sqrt{\sum |a_k|^2}$.

d) Application à $P(z) = 1 + 2z + 3z^2$: calculer la moyenne de $|P|^2$ sur le cercle et comparer avec $\max_{|z|=1} |P(z)|$.

Exercice 13 - Bras de robot articulé

Un bras plan a deux segments de longueurs $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$ (en dm). Le premier pivote autour de O d'un angle θ_1 par rapport à l'axe réel ; le second est articulé au bout du premier, d'un angle θ_2 par rapport au premier.

- Justifier que la pince est au point d'affixe $p = L_1 e^{i\theta_1} + L_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.
- Calculer p pour $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, puis $|p|$.
- Montrer que $|p|^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2$ et en déduire la zone accessible par la pince.
- On veut atteindre un objet à 4 dm de O , dans la direction de l'axe réel. Déterminer $\cos \theta_2$, puis θ_1 (on donnera une valeur approchée).



Le bras pour $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14 - Cosinus d'un nombre complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

- Vérifier que cette définition prolonge le cosinus réel et que $\cos(-z) = \cos z$.
- Calculer $\cos(iy)$ pour y réel. Le cosinus est-il borné sur $\mathbb{C}$?
- Résoudre $\cos z = 2$ dans $\mathbb{C}$: on posera $w = e^{iz}$.
- Vérifier numériquement une solution.

Exercice 15 - Synthèse : une somme trigonométrique pondérée

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$.

- Montrer que $S_n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n q^k$ avec $q = \frac{e^{ix}}{\cos x}$, et que $q = 1 + i \tan x$.
- Calculer la somme géométrique et en déduire $S_n = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x \cos^n x}$.
- Vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Pour $x = \frac{\pi}{4}$, calculer S_n et étudier son comportement quand $n \rightarrow +\infty$.