

Plaquette 4 – Géométrie plane et transformations par les complexes

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Exercices

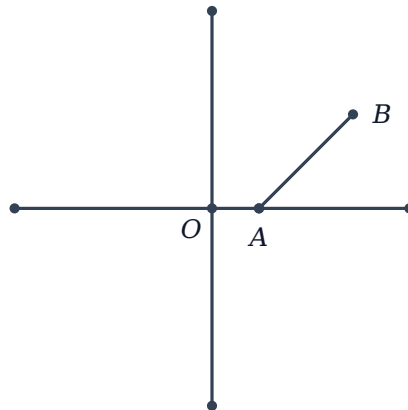
Méthode

Le plan est identifié à $\mathbb{C}$: un point M a pour affixe z , un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$. On traduit **distances** par des modules, **angles** par des arguments de quotients, **alignement**, **orthogonalité** et **cocyclicité** par des quotients réels ou imaginaires purs, et les **transformations** (translations, rotations, homothéties, similitudes, réflexions, inversion) par des formules $z \mapsto az + b$, $z \mapsto a\bar{z} + b$ ou $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Chaque résultat se contrôle sur un cas particulier ou un dessin.

Exercice 1 – Construire un triangle équilatéral

Soient A et B d'affixes $a = 1$ et $b = 3 + 2i$.

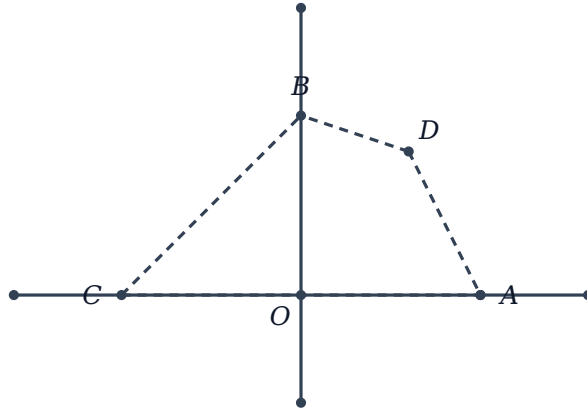
- Justifier que ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$.
- Calculer l'affixe c du point C tel que ABC soit équilatéral direct.
- Montrer que, pour tout triangle, ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Vérifier numériquement sur b).



Le segment $[AB]$: le triangle est à construire du côté direct.

Exercice 2 – Alignement et cocyclicité

- a) Montrer que les points d'affixes $1 + i$, $3 + 2i$ et $7 + 4i$ sont alignés.
 b) On donne $A(1)$, $B(i)$, $C(-1)$ et $D\left(\frac{3+4i}{5}\right)$. Calculer $\frac{c-a}{c-b}$ et $\frac{d-a}{d-b}$.
 c) En déduire que A, B, C, D sont cocycliques, et identifier le cercle.
 d) Expliquer géométriquement le critère de cocyclicité utilisé (théorème de l'angle inscrit).

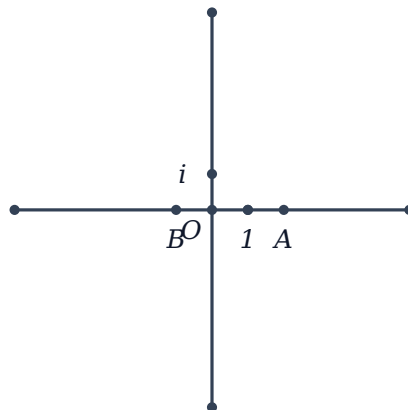


Les quatre points A, B, C, D et les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$.

Exercice 3 – Cercle d'Apollonius

Soient $A(2)$ et $B(-1)$. On cherche l'ensemble Γ des points $M(z)$ tels que $MA = 2MB$.

- a) Traduire la condition par une égalité de modules, puis par une équation cartésienne en posant $z = x + iy$.
 b) Reconnaître Γ : centre et rayon.
 c) Vérifier que les points de Γ situés sur l'axe réel partagent $[AB]$ « intérieurement et extérieurement » dans le rapport 2.
 d) Que devient l'ensemble si l'on remplace 2 par 1 ?

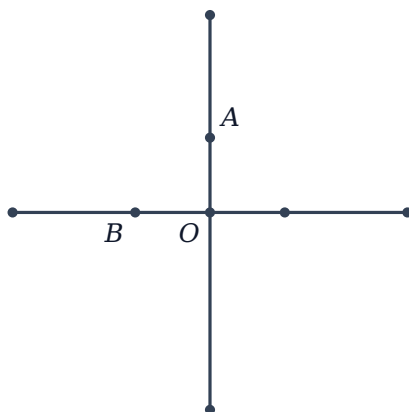


Les points $A(2)$ et $B(-1)$.

Exercice 4 – Quotient réel ou imaginaire pur

Soient $A(i)$ et $B(-1)$. Pour $z \neq -1$, on pose $Z = \frac{z-i}{z+1}$.

- Avec $z = x + iy$, calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z .
- Déterminer l'ensemble D des points $M(z)$ tels que Z soit réel, et l'ensemble C des points tels que Z soit imaginaire pur.
- Retrouver ces résultats géométriquement, sans calcul.
- Déterminer l'ensemble des points tels que $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

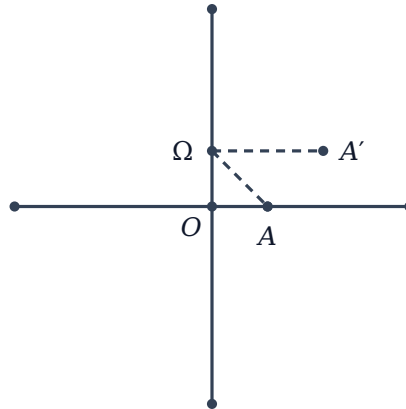


Les points $A(i)$ et $B(-1)$.

Exercice 5 – Similitude et spirale

On cherche la similitude directe $s: z \mapsto az + b$ qui fixe le point $\Omega(i)$ et envoie $A(1)$ sur $A'(2 + i)$.

- Déterminer a et b , puis le rapport et l'angle de s .
- On pose $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = s(z_n)$. Calculer $z_1, \dots, z_4$ et placer les points.
- Montrer que $z_n - i = (1 + i)^n(1 - i)$ et en déduire z_8 .
- Montrer que la distance ΩM_n est multipliée par $\sqrt{2}$ à chaque étape. Au bout de combien d'étapes dépasse-t-elle 1000 ?



Le centre Ω , le point A et son image A' .

Exercice 6 – Composer deux rotations

Soient r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre $A(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Écrire les expressions complexes de r_1 et r_2 .
- Déterminer $r_2 \circ r_1$: nature et éléments caractéristiques.
- Soit r_3 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer $r_3 \circ r_1$.
- Énoncer la règle générale : que donne la composée de deux rotations d'angles α et β ?

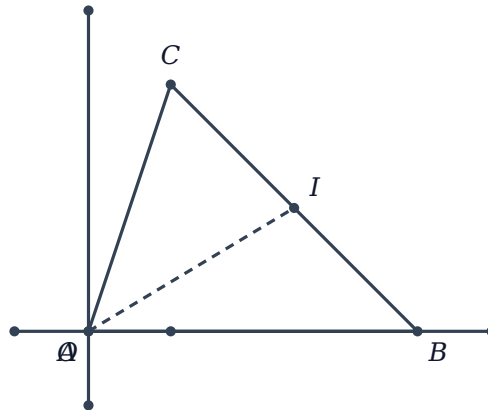
Exercice 7 – Réflexions et rotations

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\sigma_\theta: z \mapsto e^{2i\theta}\bar{z}$.

- Montrer que σ_θ fixe chaque point de la droite Δ_θ passant par O et dirigée par $e^{i\theta}$, et que $\sigma_\theta \circ \sigma_\theta = \text{id}$.
- Montrer que pour $z \notin \Delta_\theta$, le milieu de $[z; \sigma_\theta(z)]$ est sur Δ_θ et que $\sigma_\theta(z) - z$ est orthogonal à $e^{i\theta}$. Conclure : σ_θ est la réflexion d'axe Δ_θ .
- Calculer $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ et reconnaître la transformation obtenue.
- Application : donner l'expression de la réflexion d'axe la droite $y = x$ et l'image du point $3 + i$.

Exercice 8 - Théorème de la médiane

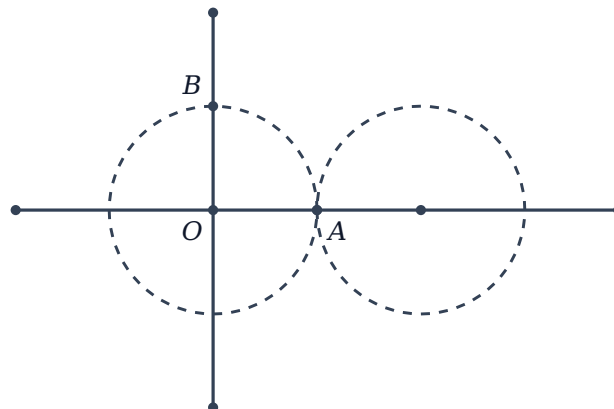
- a) Démontrer l'**identité du parallélogramme** : pour tous complexes u et v , $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Interpréter géométriquement.
- b) Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. En déduire le **théorème de la médiane** : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
- c) Vérifier avec $A(0)$, $B(4)$, $C(1 + 3i)$.
- d) Application : dans un triangle de côtés $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 8$, calculer la longueur de la médiane issue de A .



Le triangle ABC et la médiane $[AI]$.

Exercice 9 - Cas d'égalité triangulaire

- a) Soient z, z' complexes avec $z \neq 0$. Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $z' = \lambda z$.
- b) Soient $A(1)$ et $B(i)$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$.
- c) Déterminer les complexes z tels que $|z| \leq 1$ et $|z - 2| \leq 1$.

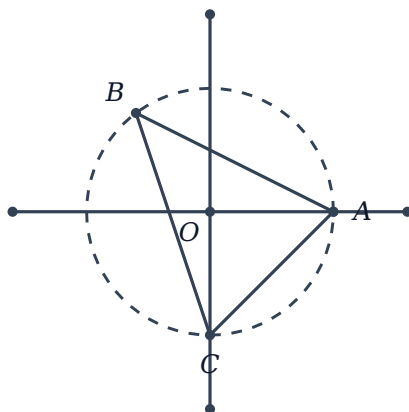


Les points A et B ; les cercles de centres O et 2 , de rayon 1 (question c).

Exercice 10 – Orthocentre et droite d'Euler

Soient A, B, C trois points distincts du cercle unité, d'affixes a, b, c . On pose $h = a + b + c$ et on note H le point d'affixe h .

- Montrer que si $|b| = |c| = 1$ et $b \neq c$, alors $\frac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
- En déduire que $(AH) \perp (BC)$ (si $H \neq A$), puis que H est l'**orthocentre** de ABC .
- Montrer que O , le centre de gravité G et H sont alignés, avec $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (droite d'Euler).
- Vérifier avec $a = 1, b = \frac{-3+4i}{5}, c = -i$.

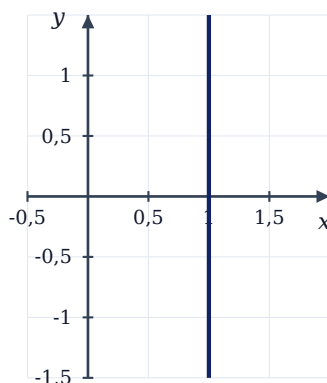


Un triangle inscrit dans le cercle unité (données de la question d).

Exercice 11 – Inversion d’une droite

On considère $f: z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$ et la droite D d’équation $\operatorname{Re} z = 1$.

- Pour $z = 1 + iy$ (y réel), calculer $w = f(z)$ sous forme algébrique.
- Montrer que $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$: l’image de D est contenue dans le cercle C de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
- Montrer que tout point de C autre que 0 est atteint. Pourquoi 0 ne l’est-il pas ?
- Quelle est l’image du demi-plan $\operatorname{Re} z > 1$?

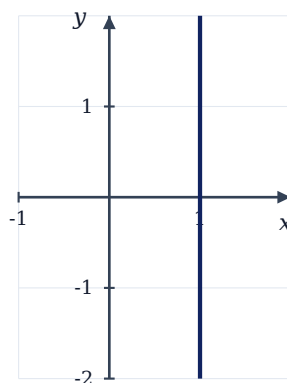


La droite D : $\operatorname{Re} z = 1$.

Exercice 12 – Image d’une droite par le carré

On considère $g: z \mapsto z^2$ et la droite D d’équation $\operatorname{Re} z = 1$.

- Pour $z = 1 + iy$, écrire $g(z) = u + iv$ avec u, v en fonction de y .
- Éliminer y et montrer que l’image de D est la parabole P d’équation $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.
- g est-elle injective sur D ? Sur $\mathbb{C}$?
- Quelle est l’image par g de la droite $\operatorname{Im} z = 1$?

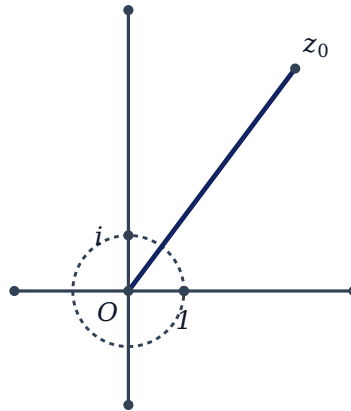


La droite D : $\operatorname{Re} z = 1$.

Exercice 13 – Distances extrémales à un cercle

Soit $z_0 = 3 + 4i$ et U le cercle unité.

- Montrer que pour tout $z \in U$, $4 \leq |z - z_0| \leq 6$.
- Déterminer les points de U où chacune des bornes est atteinte.
- Généraliser : pour $|z| = r$ et z_0 quelconque, encadrer $|z - z_0|$.
- Application : un satellite décrit un cercle de rayon 7 000 km autour du centre de la Terre ; une station au sol est à 6 400 km du centre. Quelles sont les distances minimale et maximale entre le satellite et la station ?

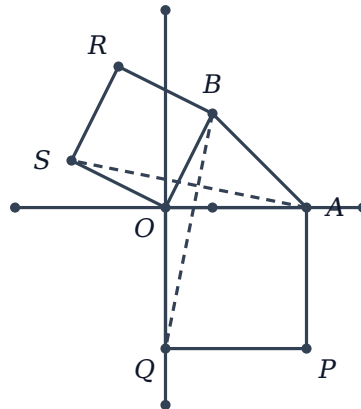


Le cercle unité et le point $z_0 = 3 + 4i$.

Exercice 14 – Carrés extérieurs d'un triangle

Soit OAB un triangle direct (O origine, $A(a)$, $B(b)$). On construit extérieurement au triangle les carrés $OAPQ$ et $OBRS$; on admet que $q = -ia$ et $s = ib$.

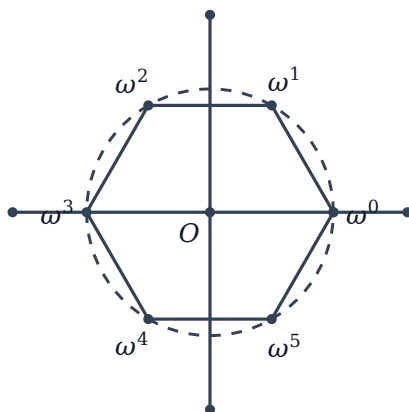
- Justifier ces deux formules à l'aide de rotations de centre O .
- Montrer que $q - b = i(s - a)$.
- En déduire que les segments $[AS]$ et $[BQ]$ ont **même longueur** et sont **perpendiculaires**.
- Vérifier avec $a = 3$ et $b = 1 + 2i$: calculer s , q , AS et BQ .



Les carrés extérieurs $OAPQ$ et $OBRS$; en pointillés, $[AS]$ et $[BQ]$.

Exercice 15 – Synthèse : aires et polygones réguliers

- a) Soient A, B, C d'affixes a, b, c . Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\overline{(b-a)}(c-a))|$.
- b) Calculer l'aire du triangle $A(1), B(4+i), C(2+5i)$.
- c) Soit $n \geq 3$ et P_n le polygone régulier dont les sommets sont les racines n -ièmes de l'unité. Montrer que son aire vaut $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ et son périmètre $2n \sin \frac{\pi}{n}$.
- d) Calculer ces grandeurs pour $n = 3, 4, 6$, puis leurs limites quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter.



L'hexagone P_6 inscrit dans le cercle unité.