

Plaquette 2 – Trigonométrie par l'exponentielle complexe

Nombres complexes — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

L'exponentielle complexe transforme la trigonométrie en **algèbre** : on **linéarise** une puissance de $\cos$ ou de $\sin$ avec les formules d'Euler, on **développe** $\cos(n\theta)$ avec la formule de Moivre et le binôme, on calcule des **sommes** trigonométriques comme parties réelles de sommes géométriques, et on résout des équations en factorisant par l'**angle moitié**. Chaque exercice se rédige en trois temps : passage aux exponentielles, calcul algébrique, retour aux fonctions réelles par parties réelle et imaginaire.

Exercice 1 – Linéariser un cube

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Linéariser $\cos^3 \theta$ à l'aide des formules d'Euler.

b) Linéariser de même $\sin^3 \theta$.

c) En déduire la valeur exacte de $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta$ et de $J = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta$.

Exercice 2 – Puissance quatrième et produit

a) Linéariser $\cos^4 \theta$.

b) Linéariser $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ de deux façons : avec les formules d'Euler, puis à l'aide de $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

c) Calculer $\int_0^{\pi} \cos^4 \theta \, d\theta$ et $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$.

Exercice 3 – Développer $\cos 5\theta$

a) À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin \theta$.

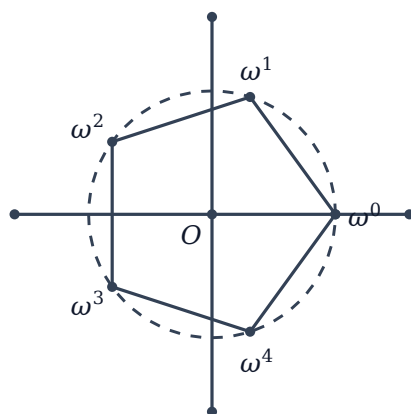
b) Exprimer $\cos 5\theta$ comme un polynôme en $c = \cos \theta$.

c) En déduire que $\cos \frac{\pi}{10}$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$, puis donner sa valeur exacte.

Exercice 4 – Le pentagone régulier

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$, puis $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$.

- Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
- Exprimer u et v à l'aide de cosinus, puis calculer $u + v$ et uv .
- En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{4\pi}{5}$.



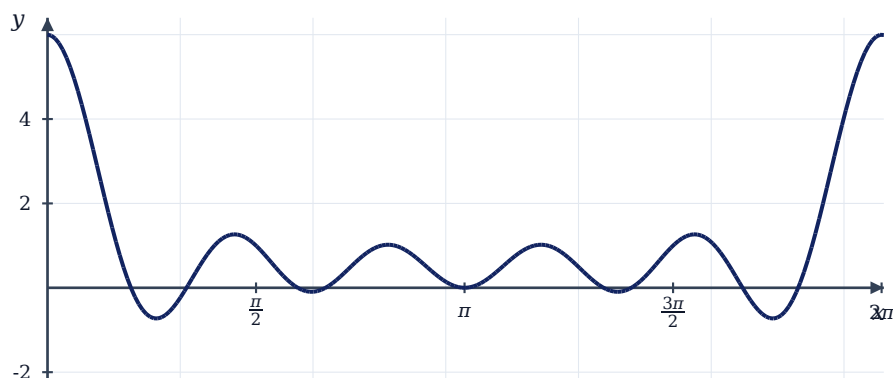
Les racines cinquièmes de l'unité forment un pentagone régulier.

Exercice 5 – Somme de cosinus en progression

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta), \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

- Exprimer $C_n + iS_n$ comme une somme géométrique et la calculer.
- Factoriser numérateur et dénominateur par l'angle moitié et en déduire C_n et S_n .
- Que valent C_n et S_n si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$? Vérifier la formule pour $n = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.



La fonction $\theta \mapsto C_5$ sur $[0; 2\pi]$: elle vaut 6 en 0 et en 2π .

Exercice 6 - Somme avec coefficients binomiaux

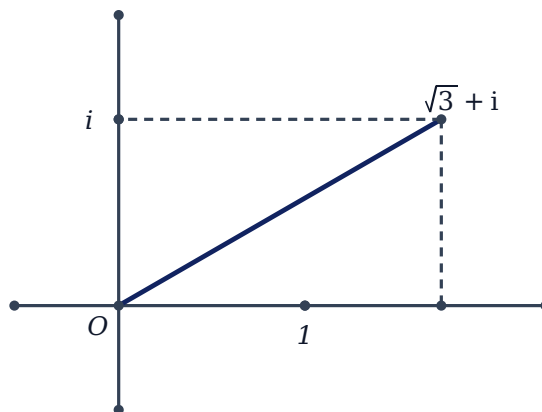
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta), \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

- Montrer que $A_n + iB_n = (1 + e^{i\theta})^n$.
- En déduire A_n et B_n sous forme factorisée.
- Application : calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \frac{k\pi}{2}$ pour $n = 4$ directement, puis par la formule.

Exercice 7 - Forme amplitude-phase

- Écrire $\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle.
- En déduire $R > 0$ et φ tels que, pour tout réel x , $\sqrt{3} \cos x + \sin x = R \cos(x - \varphi)$.
- Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$, et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Quelles sont les valeurs extrêmes de $x \mapsto \sqrt{3} \cos x + \sin x$, et en quels points sont-elles atteintes ?

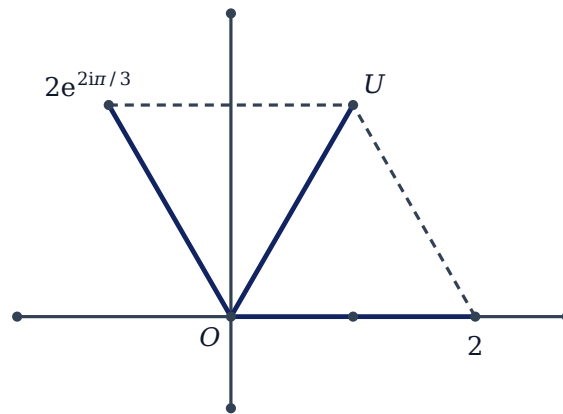


Le point d'affixe $\sqrt{3} + i$: son module et son argument donnent R et φ .

Exercice 8 – Superposition de signaux

En électricité, on additionne des tensions sinusoïdales de même pulsation ω en additionnant leurs **amplitudes complexes** : au signal $A \cos(\omega t + \alpha)$ on associe $Ae^{i\alpha}$.

- Justifier cette règle : montrer que $A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(Ae^{i\alpha}e^{i\omega t})$ et conclure.
- Écrire $u(t) = 2 \cos(\omega t) + 2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ sous la forme $A \cos(\omega t + \alpha)$.
- Montrer que $\cos(\omega t) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ pour tout t (principe du réseau triphasé équilibré).

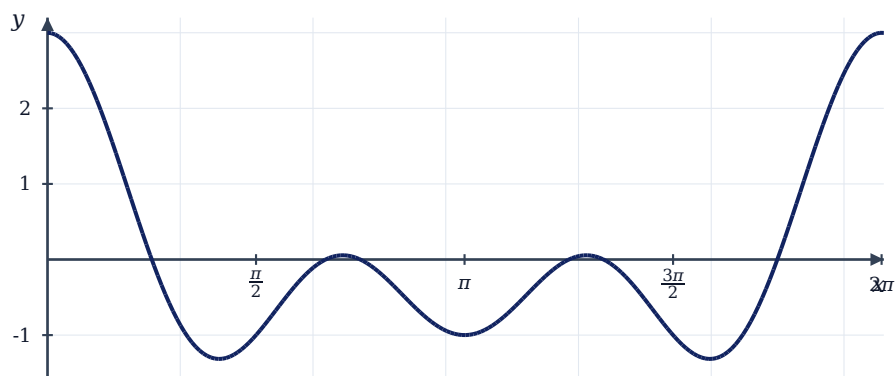


Construction de Fresnel : la somme des deux amplitudes complexes.

Exercice 9 – Équation trigonométrique

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

- À l'aide de la technique de l'angle moitié, montrer que $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
- En déduire une factorisation du membre de gauche de (E).
- Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$, puis donner les solutions dans $[0; 2\pi[$ et les placer sur le cercle.



La courbe de $x \mapsto \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ sur $[0; 2\pi]$: combien de solutions attendre ?

Exercice 10 - Produit de sinus

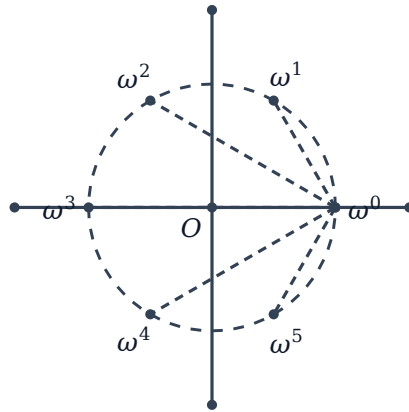
Soit $n \geq 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

a) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$, puis que $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

b) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

c) Montrer que $|1 - e^{i\alpha}| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ pour $\alpha \in [0; 2\pi]$, et conclure : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d) Vérifier pour $n = 3$ et $n = 6$; interpréter pour l'hexagone de la figure.



Les cordes issues de 1 vers les autres racines sixièmes de l'unité.

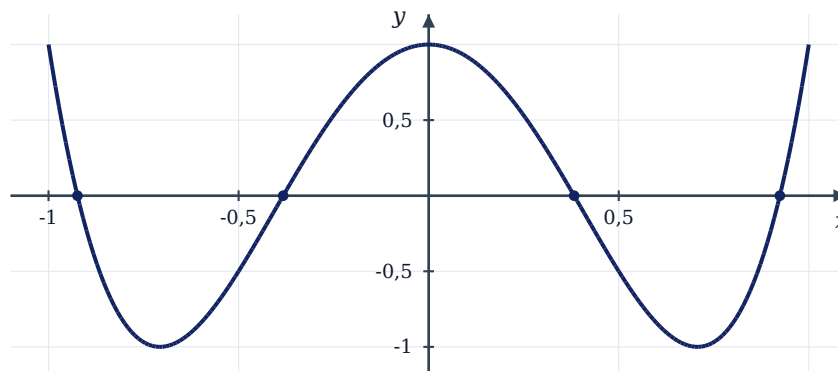
Exercice 11 - Polynômes de Tchebychev

a) Montrer que pour tous réels a et b , $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$.

b) On définit $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel θ , $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

c) Calculer T_2 , T_3 et T_4 ; comparer T_3 avec l'exercice sur $\cos 3\theta$.

d) Déterminer les racines de T_n pour $n \geq 1$ et justifier qu'elles sont toutes réelles, simples et dans $] -1 ; 1[$.



La courbe de T_4 sur $[-1; 1]$: elle oscille entre -1 et 1 et coupe quatre fois l'axe.

Exercice 12 - Formule de tan 3θ

Soit θ tel que $\cos \theta \neq 0$ et $\cos 3\theta \neq 0$, et $t = \tan \theta$.

a) Montrer que $1 + it = \frac{e^{i\theta}}{\cos \theta}$, puis que $(1 + it)^3 = \frac{e^{3i\theta}}{\cos^3 \theta}$.

b) En déduire $\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$.

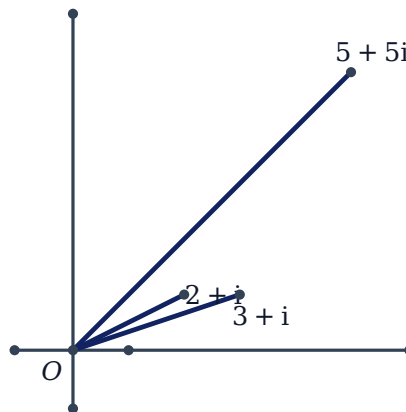
c) Montrer que $\tan \frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $P = X^3 - 3\sqrt{3}X^2 - 3X + \sqrt{3}$.

Exercice 13 - Formules de Machin

a) Calculer $(2 + i)(3 + i)$ et en déduire que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

b) Calculer $(5 + i)^4$, puis $(5 + i)^4(239 - i)$.

c) En déduire la **formule de Machin** : $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. On justifiera soigneusement le passage des arguments modulo 2π à une égalité de réels.



Les arguments s'ajoutent quand on multiplie : $\arg(5 + 5i) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 14 - Puissance en triphasé

Soit $n \geq 3$ un entier et $a \in \mathbb{R}$. On pose $\theta_k = a + \frac{2k\pi}{n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta_k} = 0$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \theta_k = 0$.

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \theta_k = \frac{n}{2}$. Pourquoi faut-il $n \geq 3$?

c) Un moteur triphasé ($n = 3$) reçoit sur ses trois phases les courants $I\sqrt{2} \cos \theta_k$ avec $\theta_k = \omega t - \frac{2k\pi}{3}$, dans des résistances identiques R . Montrer que la puissance totale $p(t) = \sum_k R(I\sqrt{2} \cos \theta_k)^2$ est **constante**.

Exercice 15 - Intégrales de Wallis paires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta$ vaut 2π si $m = 0$ et 0 sinon.

- b) Développer $\cos^{2n} \theta$ par la formule d'Euler et le binôme.
- c) En déduire $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$.
- d) Vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$ avec les exercices précédents. Que vaut $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \theta \, d\theta$?

Exercice 16 - Somme de sinus et encadrement

Soit $\theta \in]0; \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta)$.

- a) À l'aide de la somme géométrique $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$, montrer que $\sigma_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.
- b) En déduire que $|\sigma_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$ pour tout n : les sommes partielles sont **bornées**.
- c) Calculer σ_n pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $n = 1, 2, 3$ directement, et vérifier la formule.
- d) Montrer que σ_n ne tend pas vers une limite quand $n \rightarrow +\infty$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$.