

Nombres complexes – L1

Formes, exponentielle, racines, second degré et géométrie

1. Forme algébrique

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \Re z = x, \quad \Im z = y.$$

$$\bar{z} = x - iy, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad |zw| = |z||w|, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{w}.$$

Si $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Distance : $|z - a|$ est la distance entre les points d'affixes z et a .

Inégalités

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

2. Argument et exponentielle

Pour $z \neq 0$:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r = |z| > 0.$$

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi}.$$

L'argument principal $\text{Arg } z$ est souvent choisi dans $] -\pi, \pi]$.

Piège : 0 n'a pas d'argument, et l'argument d'un complexe non nul n'est pas unique.

Produit et quotient :

$$(re^{i\theta})(\rho e^{i\varphi}) = r\rho e^{i(\theta+\varphi)},$$

$$\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}.$$

3. Euler et Moivre

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Donc, si $z = re^{i\theta}$,

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Angle moitié

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(a+b)/2},$$

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(a+b)/2}.$$

4. Linéarisation

À connaître :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Méthode générale : remplacer $\cos x$ et $\sin x$ par les formules d'Euler, développer, regrouper les exponentielles opposées, puis revenir aux fonctions trigonométriques.

5. Racines n -ièmes

Si

$$a = \rho e^{i\theta} \neq 0,$$

les solutions de $z^n = a$ sont

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Elles forment un polygone régulier centré en 0.

Piège : ne pas donner une seule racine. Pour $a \neq 0$, il y en a exactement n distinctes.

6. Racines de l'unité

$$\omega_k = e^{2ki\pi/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Si $\omega = e^{2i\pi/n}$:

$$\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Pour $n \geq 2$:

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

Plus généralement,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m = \begin{cases} n, & n \mid m, \\ 0, & n \nmid m. \end{cases}$$

7. Second degré dans $\mathbb{C}$

Pour

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$

poser

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Choisir δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Pour $\delta = x + iy$ et $\Delta = u + iv$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v, \end{cases} \quad x^2 + y^2 = |\Delta|.$$

Donc

$$x^2 = \frac{|\Delta| + u}{2}, \quad y^2 = \frac{|\Delta| - u}{2},$$

avec le signe de xy imposé par v .

Dans $\mathbb{C}$, on ne discute jamais « le signe » de Δ : les complexes ne sont pas ordonnés.

8. Géométrie : $z' = az + b$

Si $a = 1$: translation de vecteur d'affixe b .

Si $a \neq 1$, point fixe :

$$\omega = \frac{b}{1-a}.$$

Puis

$$z' - \omega = a(z - \omega).$$

Avec $a = |a|e^{i\theta}$: similitude directe de centre ω , rapport $|a|$, angle θ .

Cas particuliers : $|a| = 1$: rotation ; $a > 0$ réel : homothétie.

9. Lieux géométriques

- $|z - a| = r$: cercle de centre a , rayon r .
- $|z - a| = |z - b|$: médiatrice de $[AB]$.
- $(z - a)/(z - b) \in \mathbb{R}$: alignement de A, B, M (avec $z \neq b$).

10. Réflexes d'examen

- Produits, quotients, puissances, racines $\Rightarrow$ forme exponentielle.
- Sommes, conjugués, équations en $x, y \Rightarrow$ forme algébrique.
- Toujours repérer les valeurs interdites.
- Pour un argument, vérifier le quadrant.
- Pour $z^n = a$, faire varier k sur $0, \dots, n-1$.
- Pour $az + b$, chercher le point fixe si $a \neq 1$.

11. À savoir par coeur

$$i^2 = -1, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}.$$