

Nombres complexes en L1 maths

Formes algébrique et exponentielle, racines, équations et géométrie

Idée directrice. Un même nombre complexe se lit de deux façons complémentaires : $z = x + iy$ décrit ses coordonnées dans le plan, tandis que $z = re^{i\theta}$ décrit sa taille et sa direction. Savoir passer rapidement d'une forme à l'autre permet de simplifier les produits, calculer des puissances et des racines, résoudre des équations et interpréter géométriquement les transformations du plan.

1. Le corps des nombres complexes

Forme algébrique

Le corps des complexes est

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Pour $z = x + iy$, on appelle

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = y$$

la partie réelle et la partie imaginaire de z .

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelle et imaginaire sont égales :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Les règles usuelles de calcul algébrique restent valables, avec la relation $i^2 = -1$.

Exemple

$$(2 - 3i)(1 + 4i) = 2 + 8i - 3i - 12i^2 = 14 + 5i.$$

1.1. Conjugué, module et quotient

Définition

Si $z = x + iy$, son **conjugué** est

$$\bar{z} = x - iy.$$

Son **module** est

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriétés fondamentales :

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= |z|^2, & |z| &= 0 \iff z = 0, \\ \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, & \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w}, & |zw| &= |z||w|. \end{aligned}$$

Si $z \neq 0$,

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}.$$

Ainsi, pour diviser par un complexe, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple

$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{1+4} = \frac{1+7i}{5}.$$

1.2. Inégalités sur le module

Le module est une norme sur $\mathbb{C}$:

$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad (\text{inégalité triangulaire}),$$

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \quad (\text{inégalité triangulaire renversée}).$$

Dans le plan complexe, $|z - w|$ est la distance entre les points d'affixes z et w .

2. Interprétation géométrique et argument

On identifie $z = x + iy$ au point $M(x, y)$ du plan muni d'un repère orthonormé direct.

Argument d'un complexe non nul

Soit $z \neq 0$. Un réel θ est un **argument** de z si

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Si θ est un argument, alors tous les arguments sont

$$\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On écrit souvent $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

L'**argument principal**, lorsqu'on choisit la convention $] -\pi, \pi]$, est noté $\text{Arg } z$.

Piège classique

Il n'existe pas « l'argument » comme réel unique sans convention : l'argument est défini modulo 2π . De plus, 0 **n'a aucun argument**.

Exemple

Pour $z = -1 + i\sqrt{3}$,

$$|z| = 2, \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On peut prendre $\theta = \frac{2\pi}{3}$, donc

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

3. Forme trigonométrique et forme exponentielle

La formule d'Euler définit, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ainsi tout $z \neq 0$ s'écrit

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z| > 0, \quad \theta = \arg z.$$

Cette écriture est la **forme exponentielle**.

3.1. Produit, quotient, puissances

Si

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

alors

$$zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)} \quad (w \neq 0).$$

Donc les modules se multiplient et les arguments s'additionnent.

Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

De façon équivalente,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Exemple

Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5$. Comme

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3},$$

on obtient

$$(1 + i\sqrt{3})^5 = 2^5 e^{5i\pi/3} = 32 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16 - 16i\sqrt{3}.$$

4. Formules d'Euler, linéarisation et angle moitié

En combinant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, on obtient :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

4.1. Linéariser des puissances trigonométriques

La forme exponentielle transforme les produits en sommes d'exponentielles. Par exemple,

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}),$$

d'où

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

De même,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Linéariser $\cos^p x \sin^q x$

Remplacer $\cos x$ et $\sin x$ par leurs expressions exponentielles, développer, regrouper les termes d'exposants opposés, puis revenir aux cosinus et sinus avec les formules d'Euler.

4.2. Factorisation par l'angle moitié

Pour simplifier une somme d'exponentielles,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)/2} \left(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2} \right),$$

donc

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i(a+b)/2}.$$

De même,

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) e^{i(a+b)/2}.$$

Ces deux identités sont très utiles pour trouver module et argument d'une somme de deux complexes de module 1.

5. Racines n -ièmes

Définition

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$. Une **racine n -ième** de a est un complexe z tel que

$$z^n = a.$$

Supposons $a \neq 0$ et écrivons

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0.$$

Si $z = r e^{i\varphi}$, l'équation $z^n = a$ impose

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

Ainsi :

Racines n -ièmes d'un complexe non nul

Les n racines n -ièmes de $a = \rho e^{i\theta}$ sont

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Elles sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés centré en 0.

Résoudre $z^3 = 8i$

On écrit

$$8i = 8e^{i\pi/2}.$$

Les racines cubiques sont

$$z_k = 2e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{3} + i, \quad -\sqrt{3} + i, \quad -2i.}$$

6. Racines n -ièmes de l'unité

On cherche les solutions de

$$z^n = 1.$$

Elles sont

$$\boxed{\omega_k = e^{2ki\pi/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.}$$

En posant $\omega = e^{2i\pi/n}$, on peut écrire

$$\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Somme des racines de l'unitéPour $n \geq 2$,

$$\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.}$$

Démonstration. Comme $\omega \neq 1$ et $\omega^n = 1$, la somme géométrique donne

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0.$$

Plus généralement, pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m = \begin{cases} n, & n \mid m, \\ 0, & n \nmid m. \end{cases}$$

7. Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Considérons

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Dans $\mathbb{C}$, tout complexe possède deux racines carrées opposées (sauf 0, dont la seule racine carrée est 0).Si $\delta^2 = \Delta$, alors

$$\boxed{z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

7.1. Calculer une racine carrée complexe

Pour résoudre

$$w^2 = u + iv,$$

on pose $w = x + iy$. Alors

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

d'où le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v. \end{cases}$$

De plus,

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |u + iv|.$$

Ainsi

$$x^2 = \frac{|u + iv| + u}{2}, \quad y^2 = \frac{|u + iv| - u}{2},$$

avec le signe de xy imposé par v .

Exemple

Résoudre

$$z^2 - (2 + i)z + (1 + 3i) = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (2 + i)^2 - 4(1 + 3i) = -1 - 8i.$$

On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -1 - 8i$. Comme $|\Delta| = \sqrt{65}$,

$$x^2 = \frac{\sqrt{65} - 1}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{65} + 1}{2},$$

et $xy < 0$. Une racine δ choisie permet alors d'écrire directement

$$z = \frac{2 + i \pm \delta}{2}.$$

Piège classique

Pour des coefficients complexes, le « signe du discriminant » n'a aucun sens : $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné. On calcule simplement Δ , puis une racine carrée δ de Δ .

8. Transformations du plan : $z \mapsto az + b$

Considérons

$$f(z) = az + b,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$.

8.1. Cas $a = 1$: translation

$$f(z) = z + b$$

est la translation de vecteur d'affixe b .

8.2. Cas $b = 0$: rotation-homothétie

Écrivons

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |a|.$$

Alors

$$z \mapsto az$$

multiplie les distances à l'origine par ρ et ajoute θ aux arguments. Si $\rho = 1$, c'est une rotation de centre O et d'angle θ ; si $\theta = 0$ et $\rho > 0$, c'est une homothétie de centre O et de rapport ρ .

8.3. Cas général $a \neq 1$

Le point fixe ω vérifie

$$\omega = a\omega + b,$$

donc

$$\omega = \frac{b}{1-a}.$$

Puis

$$f(z) - \omega = a(z - \omega).$$

Ainsi f est une **similitude directe** de centre ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

Lire géométriquement $z' = az + b$

1. Si $a = 1$, reconnaître une translation de vecteur b .
2. Si $a \neq 1$, calculer le point fixe $\omega = b/(1-a)$.
3. Écrire $z' - \omega = a(z - \omega)$.
4. Lire le rapport $|a|$ et l'angle $\arg a$.

Exemple

Pour

$$z' = iz + 1,$$

le point fixe est

$$\omega = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}.$$

Comme $|i| = 1$ et $\arg(i) = \pi/2$, la transformation est une rotation de centre d'affixe $(1+i)/2$ et d'angle $\pi/2$.

9. Lieux géométriques et équations complexes

La traduction entre calcul complexe et géométrie est très efficace.

- $|z - a| = r$: cercle de centre d'affixe a et de rayon r .
- $|z - a| = |z - b|$: médiatrice du segment reliant les points d'affixes a et b .
- $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \theta \pmod{2\pi}$: angle orienté associé aux directions (BM, AM) , lorsque l'expression est définie.

- $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$: points A, B, M alignés, avec les exclusions nécessaires.

Piège classique

Toujours vérifier les valeurs interdites avant de manipuler un quotient complexe. Par exemple, $\frac{z-a}{z-b}$ n'est défini que pour $z \neq b$.

10. Méthodes types à maîtriser

10.1. Trouver module et argument

Pour $z = x + iy \neq 0$:

1. calculer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. repérer le quadrant de (x, y) ;
3. déterminer un angle θ satisfaisant $\cos \theta = x/r$ et $\sin \theta = y/r$;
4. écrire $z = re^{i\theta}$, en gardant en tête que θ est défini modulo 2π .

10.2. Calculer une puissance

Passer en forme exponentielle :

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Revenir à la forme algébrique seulement à la fin si l'énoncé l'exige.

10.3. Résoudre $z^n = a$

Écrire $a = \rho e^{i\theta}$, puis

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Il faut donner exactement n racines distinctes lorsque $a \neq 0$.

10.4. Résoudre une équation polynomiale

Avant de développer lourdement :

- rechercher une factorisation évidente ;
- utiliser les racines de l'unité si des puissances régulières apparaissent ;
- pour un second degré, calculer Δ puis une racine carrée complexe de Δ .

11. Pièges classiques

1. L'argument n'est pas unique

Écrire $\arg z = \theta$ doit se comprendre modulo 2π , sauf si l'on parle explicitement de l'argument principal $\text{Arg } z$.

2. Le complexe nul n'a pas d'argument

On ne doit jamais écrire $0 = 0e^{i\theta}$ pour en déduire un argument : tous les angles donneraient la même écriture, donc aucun argument n'est défini pour 0.

3. Ne pas oublier toutes les racines

Pour $a \neq 0$, l'équation $z^n = a$ possède exactement n racines distinctes. Prendre seulement l'angle θ/n ne donne qu'une racine parmi les n .

4. $\sqrt{z}$ n'est pas une fonction globale canonique en algèbre élémentaire

Une équation $w^2 = z$ a en général deux solutions opposées. Tant qu'une branche n'est pas choisie dans un contexte d'analyse complexe, écrire « $\sqrt{z}$ » demande de préciser ce que l'on entend.

12. Exercices corrigés

Exercice 1 – Forme exponentielle et puissance

Mettre

$$z = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}$$

sous forme exponentielle et calculer z^{12} .

Correction. On a $|z| = 1$ et un argument est $-\pi/4$. Donc

$$z = e^{-i\pi/4}, \quad z^{12} = e^{-3i\pi} = -1.$$

Exercice 2 – Racines quatrièmes

Résoudre $z^4 = -16$.

Correction. Comme

$$-16 = 16e^{i\pi},$$

les racines sont

$$z_k = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ainsi

$$\boxed{\sqrt{2}(1 + i), \sqrt{2}(-1 + i), \sqrt{2}(-1 - i), \sqrt{2}(1 - i)}.$$

Exercice 3 – Racines de l'unité

Soit $\omega = e^{2i\pi/3}$. Simplifier $1 + \omega + \omega^2$.

Correction. ω est une racine cubique de l'unité différente de 1. Donc

$$1 + \omega + \omega^2 = \frac{1 - \omega^3}{1 - \omega} = 0.$$

Exercice 4 – Transformation géométrique

Déterminer la nature de

$$z' = (1 + i)z - 2.$$

Correction. Ici $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Le point fixe vaut

$$\omega = \frac{-2}{1 - (1 + i)} = \frac{-2}{-i} = -2i.$$

Donc

$$z' + 2i = (1 + i)(z + 2i).$$

C'est une similitude directe de centre d'affixe $-2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.

13. Ce qu'il faut savoir faire sans hésiter

À la fin du chapitre, il faut être capable de :

- passer de $x + iy$ à $re^{i\theta}$ et réciproquement ;
- calculer avec le conjugué et le module, notamment un quotient ;
- utiliser Euler et Moivre pour simplifier des expressions trigonométriques ;
- calculer toutes les racines n -ièmes d'un complexe ;
- reconnaître et utiliser les racines de l'unité ;
- résoudre un second degré à coefficients complexes ;
- interpréter $z \mapsto az + b$ comme translation ou similitude directe ;
- traduire certaines équations en lieux géométriques ;
- distinguer argument quelconque et argument principal, et exclure $z = 0$ lorsque nécessaire.

Réflexe L1. Pour les produits, quotients, puissances et racines, penser *forme exponentielle*. Pour les sommes, les équations en x et y , les conjugaisons et certains lieux géométriques, penser *forme algébrique*. Le bon choix de représentation fait souvent l'essentiel du calcul.