

Plaquette 1 - Majorants, borne supérieure, densité et partie entière

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

- M est un **majorant** si $\forall x \in A, x \leq M$; A est **majorée** s'il en existe un.
- $\sup A$ est le **plus petit des majorants** ; $\max A$ est le sup **s'il appartient** à A .
- Symétriquement : minorant, $\inf A$, $\min A$.

Axiome de la borne supérieure (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$) : toute partie **non vide et majorée** de $\mathbb{R}$ admet une **borne supérieure**. C'est ce qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Caractérisations de $s = \sup A$.

- **1.** s majore A , et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > s - \varepsilon$.
- **2.** s majore A , et il existe une **suite** (x_n) d'éléments de A avec $x_n \rightarrow s$.

Partie entière. Pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est l'unique entier tel que

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Densité. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert non vide contient un rationnel **et** un irrationnel.

Valeur absolue. $|x + y| \leq |x| + |y|$; $||x| - |y|| \leq |x - y|$; $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Propriété d'Archimède : pour tous réels $x > 0$ et y , il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $nx > y$.

Correction de l'exercice 1 - Majorants et borne supérieure

- **Éléments** : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ — la suite est **croissante**.
- **Majorant** : $1 - \frac{1}{n} < 1$ pour tout n , donc 1 majore A .
- **C'est le plus petit** : pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $n > \frac{1}{\varepsilon}$ pour avoir $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ ✓
- Donc $\sup A = 1$, **non atteint** ($1 \notin A$) : il n'y a **pas de maximum**.
- **Borne inférieure** : le plus petit élément est obtenu pour $n = 1$, soit 0. Donc $\inf A = \min A = 0$, **atteint**.
- **Leçon** : le sup existe toujours (partie non vide majorée) mais n'est pas nécessairement un **élément** de la partie.

Réponse. $\sup A = 1$ (non atteint), $\min A = 0$.

Correction de l'exercice 2 - Caractérisation par epsilon

Étape 1 : 1 **majore** A . Pour tout $n, \frac{n}{n+1} < 1$ puisque $n < n+1$ ✓

Étape 2 : c'est le **plus petit majorant**. Soit $\varepsilon > 0$; on cherche $x \in A$ avec $x > 1 - \varepsilon$.

- $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon$ équivaut à $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
- Un tel entier existe (propriété d'**Archimède**).
- **Conclusion** : $\sup A = 1$.

- **Contrôle** avec $\varepsilon = 0,01$: il faut $n > 99$, donc $n = 100$ donne $\frac{100}{101} \approx 0,9901 > 0,99$ ✓
- **Formulation par suites** : la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ est dans A et converge vers 1 — c'est la caractérisation 2.

Réponse. 1 majore, et $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donne $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$.

Correction de l'exercice 3 - Borne supérieure d'une réunion

Notons $a = \sup A$, $b = \sup B$ et $m = \max(a, b)$ (supposons $a \leq b$, donc $m = b$).

m majore $A \cup B$. Tout $x \in A$ vérifie $x \leq a \leq m$; tout $x \in B$ vérifie $x \leq b = m$ ✓

C'est le plus petit. Soit $\varepsilon > 0$.

- Par caractérisation de $b = \sup B$, il existe $x \in B$ avec $x > b - \varepsilon = m - \varepsilon$.
- Cet x appartient à $A \cup B$: aucun majorant strictement inférieur à m n'existe.
- **Conclusion** : $\sup(A \cup B) = m$ ✓
- **Pour l'intersection**, en revanche, on a seulement $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ — et l'inégalité peut être stricte, voire l'intersection vide.
- **Exemple** : $A = [0 ; 1]$, $B = [2 ; 3]$ donnent $\sup(A \cup B) = 3 = \max(1, 3)$ ✓

Réponse. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Correction de l'exercice 4 - Partie entière

- $[3,7] = 3$ (le plus grand entier $\leq 3,7$).
- $[-3,7] = -4$ — **attention**, ce n'est pas -3 : il faut $\lfloor x \rfloor \leq x$, et $-3 > -3,7$.
- $[-2] = -2$ (la partie entière d'un entier est lui-même).
- **Équation** : $\lfloor x \rfloor = 4$ équivaut à $4 \leq x < 5$, soit $x \in [4 ; 5[$.
- **Piège classique** : la partie entière n'est **pas** la troncature. Pour les négatifs, elle arrondit **vers le bas** ($-3,7 \rightarrow -4$).
- **Encadrement utile** : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout réel x .

Réponse. 3 ; -4 ; -2 ; et $x \in [4 ; 5[$.

Correction de l'exercice 5 - Densité de $\mathbb{Q}$

- **Choix d'un dénominateur** : par **Archimède**, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{b-a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < b-a$.
- **Choix du numérateur** : posons $p = \lfloor na \rfloor + 1$, de sorte que $na < p \leq na + 1$
- En divisant par n : $a < \frac{p}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$.
- **Conclusion** : $\frac{p}{n}$ est un rationnel de $]a ; b[$ ✓
- **Exemple** : $a = \sqrt{2} \approx 1,41421$ et $b = 1,415$. Avec $n = 10^4$, $p = \lfloor 14142,1 \rfloor + 1 = 14143$, donc $\frac{14143}{10000} = 1,4143 \in]a ; b[$ ✓
- **Densité des irrationnels** : en ajoutant $\sqrt{2}$ à un rationnel bien choisi, on construit de même un irrationnel dans tout intervalle.

Réponse. $p = \lfloor na \rfloor + 1$ avec $\frac{1}{n} < b-a$ donne $\frac{p}{n} \in]a ; b[$.

Correction de l'exercice 6 - Inégalité triangulaire

- **Première inégalité** : $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$.
- **Seconde** (par symétrie) : $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.
- Les deux quantités $|x| - |y|$ et son opposé sont donc majorées par $|x - y|$, ce qui signifie exactement

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

- **Interprétation** : l'application $x \mapsto |x|$ est 1-**lipschitzienne**, donc continue.
- **Contrôle** : $x = 5, y = -3$ donnent $|5 - 3| = 2$ et $|5 + 3| = 8$; on a bien $2 \leq 8$ ✓
- **Usage** : cette inégalité sert en permanence pour majorer $||u_n| - |\ell||$ et passer à la limite dans les valeurs absolues.

Réponse. Deux applications de l'inégalité triangulaire.

Correction de l'exercice 7 - Inf et sup d'un ensemble de quotients

- **Éléments** : $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$
- **Termes positifs** (n pair) : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ — le plus grand est $\frac{1}{2}$.
- **Termes négatifs** (n impair) : $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots$ — le plus petit est -1 .
- **Conclusion** : $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$ (atteint pour $n = 2$) et $\inf A = \min A = -1$ (atteint pour $n = 1$).
- **Les deux sont atteints** : ce sont des maximum et minimum.
- **Remarque** : la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ **converge vers** 0, qui n'est ni le sup ni l'inf — la limite d'une suite et les bornes de l'ensemble de ses valeurs sont des notions distinctes.
- **Contrôle** : tous les éléments sont bien dans $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ ✓

Réponse. $\max A = \frac{1}{2}$ et $\min A = -1$.

Correction de l'exercice 8 - Propriété d'Archimède

Par l'absurde. Supposons $\mathbb{N}$ majoré.

- $\mathbb{N}$ est non vide et majoré : par l'**axiome de la borne supérieure**, il admet $s = \sup \mathbb{N}$.
- Par caractérisation avec $\varepsilon = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > s - 1$.
- Alors $n + 1 > s$, avec $n + 1 \in \mathbb{N}$: s ne majore pas $\mathbb{N}$. **Contradiction.**
- **Conclusion** : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
- **Conséquence (Archimède)** : pour $x > 0$ et y réels, $\frac{y}{x}$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$, donc il existe n avec $n > \frac{y}{x}$, soit $nx > y$.
- **Autre conséquence** : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, ce qui fonde tous les raisonnements en ε .
- **Remarque culturelle** : il existe des corps ordonnés **non archimédiens** (contenant des « infiniment grands ») — la propriété est donc bien une conséquence de l'axiome de la borne supérieure.

Réponse. Absurde : $\sup \mathbb{N}$ serait dépassé par $n + 1$.

Correction de l'exercice 9 - Borne supérieure et inégalités

- Tout majorant de B majore aussi A (puisque $A \subset B$).
- En particulier, $\sup B$ majore A .
- $\sup A$ étant le **plus petit** majorant de A , on obtient

$$\sup A \leq \sup B$$
- **L'inégalité peut être stricte** : $A = \{0\} \subset B = [0; 1]$ donnent $0 < 1$.
- **Elle peut être une égalité** sans que les ensembles soient égaux : $A = [0; 1[\subset B = [0; 1]$ ont tous deux 1 pour borne supérieure.
- **Résultat dual** : $\inf A \geq \inf B$ — l'inf va dans le **sens opposé**.
- **Usage** : ce principe de monotonie est l'outil de base pour comparer des bornes sans les calculer.

Réponse. $\sup A \leq \sup B$ (inégalité possiblement stricte).

Correction de l'exercice 10 - Sup d'une somme

Notons $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.

$\alpha + \beta$ **majore** $A + B$: pour $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq \alpha + \beta$ ✓

C'est le plus petit majorant. Soit $\varepsilon > 0$.

- Il existe $a \in A$ avec $a > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$, et $b \in B$ avec $b > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$.
- Alors $a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$, et $a + b \in A + B$.
- **Conclusion** : $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ ✓
- **Technique du $\frac{\varepsilon}{2}$** : on découpe le ε entre les deux ensembles — c'est le geste standard dès qu'on combine deux approximations.
- **Contraste avec le produit** : $\sup(AB) \neq \sup A \sup B$ en général (penser à des ensembles contenant des négatifs).
- **Exemple** : $A = B = [0; 1[$ donnent $A + B = [0; 2[$ et $\sup = 2 = 1 + 1$ ✓

Réponse. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, via la technique du $\frac{\varepsilon}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Intervalles et bornes

- **Borne supérieure** : 2 est un élément et majore tout A , donc $\sup A = \max A = 2$, **atteint**.
- **Borne inférieure** : 0 minore A ; et pour tout $\varepsilon > 0$, l'élément $\min(\varepsilon, 1)/2 \in A$ est $< \varepsilon$. Donc $\inf A = 0$.
- **Minimum** : $0 \notin A$ (l'intervalle est ouvert en 0), donc A n'a **pas de minimum**.
- **Bilan** : $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 0$, pas de minimum.
- **Remarque** : 1 est le maximum de la **partie** $]0; 1]$, mais pas de A à cause du point isolé 2.
- **À retenir** : $\sup$ et $\inf$ existent toujours (partie non vide bornée) ; $\max$ et $\min$ n'existent que s'ils sont **atteints**.

Réponse. $\max A = 2$; $\inf A = 0$ non atteint.

Correction de l'exercice 12 - Majorant, maximum ou borne supérieure ?

L'ensemble des majorants d'une partie majorée est un intervalle $[s; +\infty[$, où s est la borne supérieure.

a) Majorants : $[2; +\infty[$; $\sup A = 2$; pas de maximum, car $2 \notin A$.

- b) Majorants : $[2; +\infty[$; $\sup B = \max B = 2$.
 c) $x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$: $C =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$, majorants $[\sqrt{3}; +\infty[$, $\sup C = \sqrt{3}$, pas de maximum.
 d) $\mathbb{N}$ n'est pas majoré (propriété d'Archimède) : aucun majorant, pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

$$\max A \text{ existe} \Leftrightarrow \sup A \in A$$

Réponse. a) 2, pas de max · b) $2 = \max$ · c) $\sqrt{3}$, pas de max · d) non majorée.

Correction de l'exercice 13 - $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure

- $1 \in A$, et 2 majore A (si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$). Remarquons que pour $x > 0$: $x \in A \Leftrightarrow x < \sqrt{2}$.
- Soit $s \in \mathbb{Q}$ un majorant de A . On montre qu'il existe un majorant rationnel strictement plus petit. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on a $s \neq \sqrt{2}$.
- **Cas** $s < \sqrt{2}$: par densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel $r \in]\max(s, 0); \sqrt{2}[$. Alors $r \in A$ et $r > s$: s ne majore pas A , contradiction. Ce cas est impossible.
- **Cas** $s > \sqrt{2}$: par densité, il existe un rationnel r avec $\sqrt{2} < r < s$
- Tout $x \in A$ vérifie $x < \sqrt{2} < r$: r est un majorant rationnel plus petit que s .
- Aucun majorant rationnel n'est donc le plus petit : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{R}$, $\sup A = \sqrt{2}$: c'est l'axiome de la borne supérieure qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Réponse. Dans $\mathbb{R}$, $\sup A = \sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel.

Correction de l'exercice 14 - Approximation décimale

- **Valeur** : $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$
- **Approximation par défaut à 10^{-3}** : c'est $\frac{\lfloor 1000x \rfloor}{1000}$.
- $1000\sqrt{3} \approx 1732,0508$, donc $\lfloor 1000x \rfloor = 1732$ et l'approximation est 1,732.
- **Encadrement** :
$$1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$$
- **Contrôle par élévation au carré** : $1,732^2 = 2,999824 < 3$ ✓ et $1,733^2 = 3,003289 > 3$ ✓
- **Principe général** : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ fournit une suite de rationnels convergeant vers x — c'est une **preuve constructive** de la densité de $\mathbb{Q}$.
- **Remarque** : ces approximations rationnelles justifient l'écriture décimale illimitée de tout réel.

Réponse. $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : borne supérieure d'une fonction

Étude de la fonction.

- f est dérivable, et $f'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
- f a le signe de $1-x^2$: f croît sur $[-1; 1]$, décroît ailleurs.
- **Maximum** en $x = 1$: $f(1) = \frac{1}{2}$.

— **Conclusion** : $\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2}$, **atteinte** en $x = 1$ — c'est un **maximum**.

Vérification algébrique. Pour tout x ,

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0$$

— Avec égalité **si et seulement si** $x = 1$ ✓ — la majoration et le cas d'égalité sont obtenus d'un coup.

— **Par symétrie** : f est **impaire**, donc $\inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{1}{2}$, atteinte en $x = -1$.

— **Limites** : $f(x) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ — la fonction est bornée malgré un domaine non borné.

Réponse. $\sup f = \frac{1}{2}$, atteinte en $x = 1$ (maximum).