

Plaquette 3 - Calculer et manipuler des bornes supérieures

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Caractérisation de $s = \sup A$ (A non vide) :

$$\forall a \in A, a \leq s \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > s - \varepsilon$$

- De façon équivalente : s majore A et il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers s .
- Symétriquement pour $\inf A$, et $\inf A = -\sup(-A)$ avec $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; pour $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$; pour $\lambda < 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.
- Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.
- Pour montrer $s \leq M$, il suffit de montrer que M majore A .

Correction de l'exercice 1 - Une suite alternée

On sépare n pair et n impair.

- n pair : $1 + \frac{1}{n} \in \left]1; \frac{3}{2}\right]$, la plus grande valeur étant $\frac{3}{2}$ (pour $n = 2$).
- n impair : $-1 + \frac{1}{n} \in \left]-1; 0\right]$.
- Donc tous les éléments sont $\leq \frac{3}{2}$, et $\frac{3}{2} \in A$: $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$.
- Tous les éléments sont > -1 , et pour $n = 2k + 1$:

$$-1 + \frac{1}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -1$$

- donc $\inf A = -1$, **non atteint**.

Réponse. $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$; $\inf A = -1$ non atteint.

Correction de l'exercice 2 - Un réel plus son inverse

- Pour $x > 0$, on a vu que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité pour $x = 1$:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

- Donc 2 minore B et $2 \in B$: $\inf B = \min B = 2$.
- B n'est pas majorée : pour $x = n$, $n + \frac{1}{n} \geq n$, qui dépasse tout réel (propriété d'Archimède).
- B n'a donc pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Réponse. $\inf B = \min B = 2$; B non majorée.

Correction de l'exercice 3 - Une différence d'inverses

- Majoration : $\frac{1}{n} \leq 1$ et $\frac{1}{m} > 0$, donc $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$: 1 majore C (strictement).
- C'est le plus petit majorant : avec $n = 1$ et $m \rightarrow +\infty$,

$$1 - \frac{1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

- donc $\sup C = 1$, non atteint.
- Par symétrie ($C = -C$, en échangeant n et m), $\inf C = -\sup C = -1$, non atteint.

Réponse. $\sup C = 1$, $\inf C = -1$, non atteints.

Correction de l'exercice 4 - Un ensemble défini par une inéquation

On factorise : $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, négatif strictement entre les racines.

$$D =] - 1 ; 2[$$

- $\sup D = 2$ et $\inf D = -1$, non atteints (l'intervalle est ouvert).
- Justification de $\sup D = 2$: 2 majore D , et pour $0 < \varepsilon < 3$, le réel $2 - \frac{\varepsilon}{2}$ est dans D et dépasse $2 - \varepsilon$.
- Plus généralement, un intervalle borné a pour bornes sup et inf ses extrémités.

Réponse. $D =] - 1 ; 2[$; $\sup D = 2$, $\inf D = -1$.

Correction de l'exercice 5 - Borne supérieure d'une somme

On note $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.

- **Majorant** : pour $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq \alpha + \beta$. Donc $A + B$ est majorée, et $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.
- **Plus petit** : soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ avec $a > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b \in B$ avec $b > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$$

- Tout nombre strictement plus petit que $\alpha + \beta$ est donc dépassé par un élément de $A + B$: $\sup(A + B) = \alpha + \beta$.
- On a partagé ε en deux moitiés : c'est la technique « $\varepsilon/2$ ».

Réponse. Majoration directe, puis $\varepsilon/2$ pour chaque terme.

Correction de l'exercice 6 - Inf et sup de l'opposé

- Si m minore A , alors pour tout $a \in A$, $a \geq m$, donc $-a \leq -m$: $-m$ majore $-A$.
- Les minorants de A sont exactement les opposés des majorants de $-A$. Le plus grand minorant de A est donc l'opposé du plus petit majorant de $-A$:

$$\inf A = -\sup(-A)$$

- Conséquence : l'existence de la borne inférieure découle de l'axiome de la borne supérieure, qu'il suffit donc de supposer.
- Exemple : $A = [2 ; 5]$, $-A = [-5 ; -2]$, $\sup(-A) = -2$ et $\inf A = 2$.

Réponse. Minorants de $A \leftrightarrow$ opposés des majorants de $-A$.

Correction de l'exercice 7 - Multiplier par une constante

- **Cas $\lambda > 0$** : multiplier par λ conserve l'ordre, donc M majore A si et seulement si λM majore λA . Le plus petit majorant est multiplié par λ :

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

- **Cas $\lambda < 0$** : on écrit $\lambda = -\mu$ avec $\mu > 0$: $\lambda A = -(\mu A)$, et d'après l'exercice précédent, $\sup(\lambda A) = -\inf(\mu A) = -\mu \inf A = \lambda \inf A$.
- Exemple : $A = [1 ; 3]$, $\lambda = -2$: $\lambda A = [-6 ; -2]$ et $\sup(\lambda A) = -2 = -2 \times \inf A$.

Réponse. $\lambda > 0$: $\lambda \sup A$; $\lambda < 0$: $\lambda \inf A$.

Correction de l'exercice 8 - Inclusion et bornes

- $\sup A \leq \sup B$: $\sup B$ majore B , donc majore $A \subset B$; comme $\sup A$ est le plus petit majorant de A , $\sup A \leq \sup B$.
- $\inf A \geq \inf B$: même raisonnement avec les minorants.
- $\inf A \leq \sup A$: pour un $a \in A$ (qui existe car A est non vide),

$$\inf A \leq a \leq \sup A$$
- Remarque : plus la partie est grande, plus ses bornes s'écartent.

Réponse. Un majorant de B majore A ; même idée pour les minorants.

Correction de l'exercice 9 - Bornes de fonctions

- a) $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, avec égalité en $x = \frac{1}{2}$: le sup vaut $\frac{1}{4}$, atteint.
- b) Soit $g(x) = x e^{-x}$. Alors $g'(x) = (1-x)e^{-x}$: g croît sur $]0; 1]$ et décroît sur $[1; +\infty[$.

$$\sup_{x > 0} g(x) = g(1) = \frac{1}{e} \quad (\text{atteint})$$
- $g > 0$ sur $]0; +\infty[$, et $g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$: l'inf vaut 0, non atteint.
- Pour une fonction, le sup de ses valeurs se lit sur le tableau de variations, avec les limites aux bornes.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ atteint · b) $\sup \frac{1}{e}$ atteint, $\inf 0$ non atteint.

Correction de l'exercice 10 - Caractérisation par une suite

- 1 majore A : $\frac{n}{n+1} < 1$ car $n < n+1$.
- La suite $a_n = \frac{n}{n+1}$ est formée d'éléments de A et

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$
- Un majorant limite d'une suite d'éléments de A est la borne supérieure : $\sup A = 1$.
- Il n'est pas atteint. En revanche, $\min A = 0$ (pour $n = 0$), car la suite est croissante.

Réponse. 1 majore A et $a_n \rightarrow 1$; $\sup A = 1$ non atteint.

Correction de l'exercice 11 - Une partie sous une autre

- Tout $b \in B$ majore A ; A est non vide et majorée, donc $\sup A$ existe, et comme c'est le plus petit majorant :

$$\forall b \in B, \sup A \leq b$$
- Donc $\sup A$ minore B ; B est non vide et minorée, $\inf B$ existe, et c'est le plus grand minorant : $\sup A \leq \inf B$.
- L'égalité peut avoir lieu ($A = [0; 1]$, $B = [1; 2]$) ou non ($A = [0; 1]$, $B = [2; 3]$).
- Cette propriété est à la base de la construction de l'intégrale (sommes inférieures et supérieures).

Réponse. Tout b majore A , donc $\sup A$ minore B .

Correction de l'exercice 12 - Le produit, un piège

- Avec $A = B = \{-2, 1\}$: $AB = \{4, -2, -2, 1\} = \{-2, 1, 4\}$, donc $\sup(AB) = 4$, alors que $\sup A \times \sup B = 1 \times 1 = 1$.

- L'égalité est **fausse** en général : le produit de deux négatifs peut être grand.
- Si $A, B \subset \mathbb{R}_+$: pour $a \in A$ et $b \in B$, $ab \leq \sup A \sup B$; et avec $a_n \rightarrow \sup A$, $b_n \rightarrow \sup B$ dans A et B :

$$a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup A \times \sup B$$

- donc l'égalité est vraie pour des parties de réels positifs.

Réponse. Faux en général ($4 \neq 1$) ; vrai pour des parties de $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 13 - Exponentielle décroissante

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de valeur 1 en 0 et de limite 0 en $+\infty$.

$$E =]0; 1]$$

- $\sup E = \max E = 1$ (atteint en $x = 0$).
- $\inf E = 0$: 0 minore E (une exponentielle est strictement positive), et $e^{-n} \rightarrow 0$. Il n'est pas atteint.
- On retrouve le schéma : une borne atteinte correspond à une valeur prise, une borne non atteinte à une limite.

Réponse. $\sup E = \max E = 1$; $\inf E = 0$ non atteint.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : $A = [0; 1[$ est majorée, sans plus grand élément.
- Vrai** : il appartient à A et majore A .
- Vrai** : on compare les éléments un à un (récurrence sur le nombre d'éléments).
- Faux** : $A = [0; 1[$ et $M = 1$: tous les éléments sont < 1 , mais $\sup A = 1$.

$$(\forall a \in A, a < M) \Rightarrow \sup A \leq M \quad (\text{inégalité large seulement})$$

- Passer au sup transforme les inégalités strictes en inégalités larges.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une borne non atteinte

- On écrit $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 - \frac{2}{n^2 + 1}$, qui croît avec n . Le minimum est obtenu pour $n = 0$: $\min A = -1$.

- Chaque élément est < 1 : 1 majore A . Soit $\varepsilon > 0$; on cherche n avec

$$1 - \frac{2}{n^2 + 1} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

- Un tel n existe (propriété d'Archimède). Donc $\sup A = 1$.
- c) Non : $\frac{2}{n^2 + 1} > 0$ pour tout n , donc aucun élément ne vaut 1.

Réponse. a) $\min A = -1$ · b) $n^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ · c) non.