

Plaquette 4 - Partie entière, densité et approximations

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Partie entière et densité.

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq x < n + 1 \quad \text{d'où} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

- Pour $n \in \mathbb{Z}$: $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- Nombre de multiples de k dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$: $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- Approximation décimale par défaut à 10^{-n} près : $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, avec $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$.
- Densité : entre deux réels $a < b$, il existe un rationnel et un irrationnel (et même une infinité).
- Un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Correction de l'exercice 1 - Translater par un entier

On note $p = \lfloor x \rfloor$: $p \leq x < p + 1$. En ajoutant n :

$$p + n \leq x + n < (p + n) + 1$$

- Comme $p + n$ est un **entier**, c'est la partie entière de $x + n$: $\lfloor x + n \rfloor = p + n$.
- Faux pour n non entier : $\lfloor 0,5 + 0,5 \rfloor = 1$ alors que $\lfloor 0,5 \rfloor + 0,5 = 0,5$ n'est même pas un entier.
- Retenir : on « sort » un entier de la partie entière, jamais un réel quelconque.

Réponse. Vrai pour $n \in \mathbb{Z}$ (encadrement translaté) ; faux sinon.

Correction de l'exercice 2 - Partie entière de l'opposé

- Si $x \in \mathbb{Z}$: $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$, la somme vaut 0.
- Sinon, $p < x < p + 1$ avec $p = \lfloor x \rfloor$ (inégalités strictes car x n'est pas entier). Alors $-p - 1 < -x < -p$, donc $\lfloor -x \rfloor = -p - 1$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = p + (-p - 1) = -1$$

- Exemple : $\lfloor 2,3 \rfloor + \lfloor -2,3 \rfloor = 2 + (-3) = -1$. Attention, $\lfloor -2,3 \rfloor = -3$, et non -2 .

Réponse. 0 si $x \in \mathbb{Z}$, -1 sinon.

Correction de l'exercice 3 - Partie entière du double

On écrit $x = p + t$ avec $p = \lfloor x \rfloor$ et $t \in [0 ; 1[$. Alors $2x = 2p + 2t$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2p + \lfloor 2t \rfloor$ (on sort l'entier $2p$).

- Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$: $2t \in [0 ; 1[$, donc $\lfloor 2t \rfloor = 0$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
- Si $\frac{1}{2} \leq t < 1$: $2t \in [1 ; 2[$, donc

$$\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$$

- Exemples : $x = 3,2$ donne $\lfloor 6,4 \rfloor = 6 = 2 \times 3$; $x = 3,7$ donne $\lfloor 7,4 \rfloor = 7 = 2 \times 3 + 1$.

Réponse. $2[x]$ si $x - [x] < \frac{1}{2}$, sinon $2[x] + 1$.

Correction de l'exercice 4 - Une équation

— Par définition de la partie entière :

$$[2x - 1] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 1 < 4 \Leftrightarrow 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

— Solution : $\left[2; \frac{5}{2}\right[$.

— $[x] = x$ signifie que x est égal à un entier : l'ensemble des solutions est $\mathbb{Z}$.

— Contrôle : $x = 2,4$ donne $[3,8] = 3$; $x = 2,5$ donne $[4] = 4$, non solution (borne exclue).

Réponse. $\left[2; \frac{5}{2}\right[; \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5 - Partie entière de la racine

Pour $n \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$[\sqrt{n}] = k \Leftrightarrow k \leq \sqrt{n} < k + 1 \Leftrightarrow k^2 \leq n < (k + 1)^2$$

— Pour $k = 5$: $25 \leq n < 36$, soit les entiers de 25 à 35 : 11 entiers.

— En général : de k^2 à $(k + 1)^2 - 1$, soit $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$ entiers.

— Vérification : pour k de 1 à 9, on compte $3 + 5 + \dots + 19 = 99$ entiers (de 1 à 99), et $n = 100$ donne $k = 10$.

Réponse. 11 ; en général $2k + 1$.

Correction de l'exercice 6 - Compter des multiples

Les multiples de k dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ sont $k, 2k, \dots, qk$, où q est le plus grand entier tel que $qk \leq n$, c'est-à-dire

$$q \leq \frac{n}{k} < q + 1 \Leftrightarrow q = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

— Multiples de 7 jusqu'à 100 : $\left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14$ (car $7 \times 14 = 98$).

— Multiples de 14 : $\left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor = 7$.

— Divisibles par 7 mais pas par 14 : $14 - 7 = 7$ (les multiples impairs de 7 : 7, 21, ..., 91).

Réponse. $[n/k]$; 14 ; 7.

Correction de l'exercice 7 - Approximations décimales

a) On part de $[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1$ et on divise par $10^n > 0$:

$$d_n \leq x < d_n + \frac{1}{10^n}$$

— b) $\sqrt{2} \approx 1,41421$: $d_0 = 1$, $d_1 = 1,4$, $d_2 = 1,41$, $d_3 = 1,414$. Par exemple, $1,414^2 = 1,999396 < 2 < 1,415^2 = 2,002225$.

— c) $0 \leq x - d_n < 10^{-n}$ et $10^{-n} \rightarrow 0$: par encadrement, $d_n \rightarrow x$.

— Les d_n sont des décimaux : tout réel est limite d'une suite de décimaux (donc de rationnels).

Réponse. a) diviser l'encadrement par 10^n · b) 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 · c) encadrement.

Correction de l'exercice 8 - Densité des décimaux

Par la propriété d'Archimède, il existe n avec $10^{-n} < b - a$. On pose

$$d = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor + 1}{10^n}$$

- D'une part, $\lfloor 10^n a \rfloor > 10^n a - 1$, donc $d > a$.
- D'autre part, $d \leq \frac{10^n a + 1}{10^n} = a + 10^{-n} < b$.
- Application : $b - a = \frac{1}{3} - 0,3333 = \frac{1}{30\,000}$; avec $n = 5$ ($10^{-5} < \frac{1}{30\,000}$), on trouve $d = 0,33331$, et en effet $0,3333 < 0,33331 < 0,33333\dots$

Réponse. $d = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor + 1}{10^n}$ avec $10^{-n} < b - a$; par exemple 0,33331.

Correction de l'exercice 9 - Densité des irrationnels

On divise l'intervalle par $\sqrt{2}$: $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Cet intervalle ouvert contient une infinité de rationnels, donc un rationnel $r \neq 0$.

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < r\sqrt{2} < b$$

- Le réel $r\sqrt{2}$ est irrationnel : sinon $\sqrt{2} = \frac{r\sqrt{2}}{r}$ serait un quotient de rationnels, donc rationnel.
- On a évité $r = 0$, car $0 \times \sqrt{2} = 0$ est rationnel.
- Ainsi, rationnels et irrationnels sont « partout » dans $\mathbb{R}$, entremêlés.

Réponse. $r\sqrt{2}$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$ entre $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 10 - Un développement périodique

- On multiplie par 10^2 pour décaler d'une période : $100x = 27,2727\dots = 27 + x$.

$$99x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

- Pour y : $10y = 12,333\dots$ et $100y = 123,333\dots$, donc $90y = 123 - 12 = 111$ et $y = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$.
- Vérifications : $3 \div 11 = 0,2727\dots$ et $37 \div 30 = 1,2333\dots$
- Tout développement décimal périodique donne ainsi un rationnel.

Réponse. $x = \frac{3}{11}$; $y = \frac{37}{30}$.

Correction de l'exercice 11 - Est-ce que 0,999... vaut 1 ?

- **Méthode 1** (comme pour un développement périodique) : si $x = 0,999\dots$, alors $10x = 9,999\dots = 9 + x$, donc $9x = 9$ et $x = 1$.
- **Méthode 2** (par les sommes géométriques) : 0,999... est la limite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = 9 \times \frac{\frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

- Un même réel peut donc avoir deux écritures décimales : $1 = 0,999\dots$, $0,5 = 0,4999\dots$. C'est le seul cas d'ambiguïté (les décimaux non nuls).

Réponse. $9x = 9$; ou somme géométrique $1 - 10^{-n} \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 12 - Une limite avec la partie entière

Pour $n \geq 1$, on part de $nx - 1 < [nx] \leq nx$ et on divise par $n > 0$:

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq x$$

- Les deux bornes tendent vers x : par le théorème d'encadrement, $\frac{[nx]}{n} \rightarrow x$.
- C'est une autre façon de voir que tout réel est limite d'une suite de rationnels (ici de dénominateur n).
- Exemple : $x = \pi$, $n = 7$: $[7\pi] = 21$ et $\frac{21}{7} = 3$; $n = 100$: $\frac{314}{100} = 3,14$.

Réponse. Encadrement $x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq x$.

Correction de l'exercice 13 - Puissances de 1/2

- Récurrence : $2^0 = 1 \geq 0$; si $2^n \geq n$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n \geq n + 1$ pour $n \geq 1$ (et $2^1 = 2 \geq 1$).
- Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété d'Archimède, il existe n avec $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors

$$2^n \geq n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

- Application : pour $\varepsilon = 0,001$, $n = 1\,001$ convient d'après ce raisonnement, mais $n = 10$ suffit déjà ($2^{10} = 1\,024$) : l'argument donne un n valable, pas le plus petit.

Réponse. $2^n \geq n > \frac{1}{\varepsilon}$ grâce à Archimède.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : $x = y = 0,5$ donne 1 d'un côté, 0 de l'autre.
- Vrai** : $[x] + [y]$ est un entier inférieur ou égal à $x + y$, donc à la partie entière de $x + y$ (le plus grand entier $\leq x + y$).

$$[x] + [y] \leq x + y = [x + y] \leq [x + y]$$

- Vrai** : c'est la densité des irrationnels.
- Vrai** : si $r + i = q$ avec r, q rationnels, alors $i = q - r$ serait rationnel.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une somme de parties entières

On regroupe les termes par paires $(2j - 1, 2j)$, pour j de 1 à m : $\left\lfloor \frac{2j-1}{2} \right\rfloor = j - 1$ et $\left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor = j$.

$$S = \sum_{j=1}^m ((j-1) + j) = \sum_{j=1}^m (2j-1) = m^2$$

- (somme des m premiers impairs).
- $m = 2$: $0 + 1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$. $m = 3$: $0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9 = 3^2$.
- Grouper par paires évite de traiter séparément les indices pairs et impairs.

Réponse. $S = m^2$.