

**Plaquette 5 - Problèmes : intervalles,
moyennes et borne supérieure**
Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils**Outils sur $\mathbb{R}$.**

- Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :
 $\forall a, b \in I, \forall c \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b \Rightarrow c \in I$.
- Moyennes de deux réels $a, b > 0$:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$
- Suite croissante et majorée : elle converge vers $\sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Segments emboîtés : si $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ et $b_n - a_n \rightarrow 0$, leur intersection est un singleton.
- Si $|x - y| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = y$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un intervalle

- $\mathbb{R}^*$: -1 et 1 lui appartiennent, $-1 \leq 0 \leq 1$, mais $0 \notin \mathbb{R}^*$.
- $[0; 1] \cup [2; 3]$: 1 et 2 lui appartiennent, mais $1,5$ non.
- Intersection : soient I, J deux intervalles, $a, b \in I \cap J$ et $a \leq c \leq b$. Comme $a, b \in I$ et I est un intervalle, $c \in I$; de même $c \in J$.

$$c \in I \cap J$$

- La réunion de deux intervalles n'en est pas un en général (deuxième exemple), sauf s'ils se rencontrent.

Réponse. Contre-exemples 0 et $1,5$; l'intersection vérifie la caractérisation.

Correction de l'exercice 2 - Trois moyennes

- Inégalité de droite : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donne $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
- Inégalité de gauche : on l'applique à $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$:

$$\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a+b}{2ab}$$
- En passant aux inverses (tous positifs, l'ordre s'inverse) : $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.
- Égalité dans chaque cas si et seulement si $a = b$. Exemple : $a = 1, b = 4 : 1,6 \leq 2 \leq 2,5$.

Réponse. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, puis même inégalité pour $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$.

Correction de l'exercice 3 - Un produit sous contrainte

- D'après l'inégalité des moyennes :

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = 25$$

- avec égalité si et seulement si $x = y = 5$. Le maximum vaut 25 .

- Pour $x + 2y = 10$: on applique l'inégalité à x et $2y$: $x \times 2y \leq \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = 25$, donc $xy \leq \frac{25}{2}$, avec égalité si $x = 2y = 5$, soit $x = 5$ et $y = 2,5$.
 - Interprétation : parmi les rectangles de périmètre 20, le carré a la plus grande aire.
- Réponse.** 25 pour $x = y = 5$; $\frac{25}{2}$ pour $x = 5, y = 2,5$.

Correction de l'exercice 4 - Suite croissante majorée

L'ensemble des termes est non vide et majoré : ℓ existe (axiome de la borne supérieure). Soit $\varepsilon > 0$.

- Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe N avec $u_N > \ell - \varepsilon$.
- La suite étant croissante, pour tout $n \geq N$: $u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$. Et $u_n \leq \ell$ puisque ℓ majore.

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

- C'est la définition de $u_n \rightarrow \ell$.
- Ce théorème n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$: la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ est croissante, majorée, rationnelle, et sa limite n'est pas rationnelle.

Réponse. $u_N > \ell - \varepsilon$ puis croissance : $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$.

Correction de l'exercice 5 - La somme des inverses des carrés

- $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite est croissante.
- Pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$. En sommant de 2 à n (somme télescopique) :

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

- (S_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge (exercice précédent), vers une limite ≤ 2 .
- (Euler a montré que cette limite vaut $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.)

Réponse. Croissante, majorée par $2 - \frac{1}{n}$: convergente.

Correction de l'exercice 6 - Segments emboîtés

- Pour tous n, m : $a_n \leq a_{\max(n,m)} \leq b_{\max(n,m)} \leq b_m$. Donc chaque b_m majore l'ensemble des a_n , qui a une borne supérieure s , avec $a_n \leq s \leq b_m$ pour tous n, m .

$$\forall n, s \in [a_n; b_n]$$

- **Unicité** : si $x < y$ sont dans tous les segments, alors $b_n - a_n \geq y - x > 0$ pour tout n , ce qui contredit $b_n - a_n \rightarrow 0$.
- C'est le principe de la dichotomie : en coupant un segment en deux à chaque étape, on « piège » un unique réel.

Réponse. $s = \sup a_n$ est dans tous les segments ; unicité car $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 7 - Les nombres dyadiques

Soient $a < b$. On choisit n tel que $\frac{1}{2^n} < b - a$ (possible car $2^n \geq n$ et propriété d'Archimède), puis

$$d = \frac{\lfloor 2^n a \rfloor + 1}{2^n}$$

- Comme pour les décimaux : $d > a$ et $d \leq a + 2^{-n} < b$.
- Application : $b - a = 0,05$; $\frac{1}{2^5} = 0,03125 < 0,05$. Avec $n = 5$: $2^5 \times 0,3 = 9,6$, donc $d = \frac{10}{32} = 0,3125$, qui est bien entre 0,3 et 0,35.
- Les dyadiques sont les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres en base 2 : ce sont ceux que manipule exactement un ordinateur.

Réponse. $d = \frac{\lfloor 2^n a \rfloor + 1}{2^n}$; par exemple $\frac{10}{32} = 0,3125$.

Correction de l'exercice 8 - Prolonger par densité

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les approximations décimales $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ sont rationnelles et tendent vers x .

- Par continuité de f en x (caractérisation séquentielle) :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

- Donc f est nulle partout.
- L'hypothèse de continuité est indispensable : la fonction indicatrice des irrationnels est nulle sur $\mathbb{Q}$ sans être nulle.
- Conséquence : deux fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ sont égales (appliquer le résultat à leur différence).

Réponse. $f(x) = \lim f(d_n) = 0$ avec $d_n \in \mathbb{Q}$, $d_n \rightarrow x$.

Correction de l'exercice 9 - Le maximum de $\sin + \cos$

On factorise par $\sqrt{2}$ et on reconnaît une formule d'addition :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

- Le sinus prend toutes les valeurs de $[-1 ; 1]$: l'ensemble est $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$.
- $\sup = \max = \sqrt{2}$, atteint en $x = \frac{\pi}{4}$; $\inf = \min = -\sqrt{2}$, atteint en $x = \frac{5\pi}{4}$.
- Autre méthode : par Cauchy-Schwarz, $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{1+1} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{2}$.

Réponse. $\max = \sqrt{2}$ (en $\frac{\pi}{4}$), $\min = -\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Inégalité triangulaire généralisée

- Pour $n = 1$: égalité.
- Hérédité : si la propriété est vraie pour n réels, on applique l'inégalité triangulaire à deux termes, puis l'hypothèse :

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k \leq \sum_{k=1}^n x_k + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}|$$

- C'est la propriété pour $n + 1$ réels.
- Égalité si et seulement si tous les x_k non nuls ont le même signe.
- Application : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$.

Réponse. Récurrence avec l'inégalité triangulaire à deux termes.

Correction de l'exercice 11 - Arbitrairement proches

- **Par l'absurde**, supposons $x \neq y$. Alors $d = |x - y| > 0$, et avec $\varepsilon = \frac{d}{2}$:

$$d \leq \frac{d}{2} \Rightarrow d \leq 0$$

- ce qui contredit $d > 0$. Donc $x = y$.
- Deuxième question : si $x > y$, on prend $\varepsilon = \frac{x-y}{2}$ et on obtient $x \leq y + \frac{x-y}{2}$, soit $x \leq y$: contradiction. Donc $x \leq y$.
- Ce schéma est omniprésent en analyse : pour montrer $x \leq y$, on montre $x \leq y + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Réponse. $x = y$; dans le second cas, $x \leq y$.

Correction de l'exercice 12 - Majorer un produit par des carrés

- $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ donne $a^2 + b^2 \geq 2|a||b| = 2|ab|$.
- Pour la seconde, on applique la première à $\sqrt{\lambda} a$ et $\frac{b}{\sqrt{\lambda}}$, dont le produit vaut ab :

$$|ab| = \sqrt{\lambda} a \cdot \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{2} \left(\lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda} \right)$$

- Intérêt : en choisissant λ petit, on donne un « petit poids » à a^2 , au prix d'un grand poids sur b^2 ; cette souplesse sert constamment en analyse.

Réponse. $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, puis appliquer à $\sqrt{\lambda} a$ et $b/\sqrt{\lambda}$.

Correction de l'exercice 13 - L'ensemble des majorants

- (D) Si $m \geq \sup A$, alors pour tout $a \in A$, $a \leq \sup A \leq m$: m majore A .
- (C) Si m majore A , alors $m \geq \sup A$, puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants.

$$M(A) = [\sup A ; +\infty[$$

- En particulier, l'ensemble des majorants est un intervalle fermé à gauche : il contient toujours sa borne inférieure, qui est $\sup A$.
- Exemple : $A = [0 ; 1[$ a pour majorants $[1 ; +\infty[$.

Réponse. Double inclusion ; $M(A) = [\sup A ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** : si $c \in I \cap J$, pour $a, b \in I \cup J$ et $a \leq t \leq b$, on compare t à c ; t est entre a et c ou entre c et b , donc dans l'intervalle qui les contient tous deux.
- Faux** : les approximations décimales de $\sqrt{2}$ sont rationnelles, croissantes, majorées, de limite irrationnelle.
- Vrai** : on applique le théorème à $(-u_n)$, croissante et majorée.
- Faux** : avec $x = y$, on a bien $x < y + \frac{1}{n}$ pour tout n , mais pas $x < y$. On peut seulement conclure

$$x \leq y$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux ($x \leq y$ seulement).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une fonction homographique

- $2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = f(x)$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante.
- $f(0) = 1$, donc $\inf A = \min A = 1$. De plus $f(x) < 2$ et $f(x) \rightarrow 2$ quand $x \rightarrow +\infty$: $\sup A = 2$, non atteint.

c) On résout :

$$2 - \frac{1}{x+1} \geq 1,9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq 0,1 \Leftrightarrow x+1 \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 9$$

— On retrouve la caractérisation du sup : pour $\varepsilon = 0,1$, les éléments $f(x)$ avec $x \geq 9$ dépassent $2 - \varepsilon$.

Réponse. b) $\min A = 1$, $\sup A = 2$ non atteint · c) $x \geq 9$.