

Plaquette 2 - Valeur absolue et inégalités

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Valeur absolue et inégalités.

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

- $|xy| = |x||y|$; $\sqrt{x^2} = |x|$; $x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.
- Encadrements : si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $a - d \leq x - y \leq b - c$ (on soustrait en croisant les bornes).
- Pour des positifs, on peut multiplier et inverser (en renversant l'ordre) : $0 < a \leq x \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.
- Un carré est positif : $(a - b)^2 \geq 0$ donne $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Correction de l'exercice 1 - Inéquations avec une valeur absolue

a) Distance de x à 3 au plus 2 :

$$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

- Solution : $[1 ; 5]$.
- b) $|2x + 1| > 3 \Leftrightarrow 2x + 1 > 3$ ou $2x + 1 < -3 \Leftrightarrow x > 1$ ou $x < -2$.
- Solution : $] -\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.
- Contrôle : $x = 0$ donne $|1| = 1$, non solution de b), et 0 n'est bien pas dans l'ensemble trouvé.

Réponse. a) $[1 ; 5]$ · b) $] -\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 - À égale distance

- Par le calcul : deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont.

$$(x - 1)^2 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow -2x + 1 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

- Géométriquement : $|x - 1|$ est la distance de x à 1, $|x + 2|$ la distance de x à -2 . Le point équidistant de 1 et -2 est leur milieu, $\frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2}$.
- L'unique solution est $x = -\frac{1}{2}$.

Réponse. $x = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Deux valeurs absolues

On distingue trois cas, selon la position de x par rapport à 1 et 3.

- Si $x \leq 1$: $(1 - x) + (3 - x) = 4 - 2x = 4 \Leftrightarrow x = 0$, qui vérifie bien $x \leq 1$.
- Si $1 \leq x \leq 3$: $(x - 1) + (3 - x) = 2 \neq 4$: pas de solution.
- Si $x \geq 3$: $(x - 1) + (x - 3) = 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = 4$, qui vérifie $x \geq 3$.

$$S = \{0 ; 4\}$$

- Interprétation : la somme des distances à 1 et à 3 vaut 4 en deux points, symétriques par rapport au milieu 2.

Réponse. $\{0; 4\}$.

Correction de l'exercice 4 - Maximum et minimum

On distingue deux cas.

- Si $a \geq b$: $|a - b| = a - b$ et $\frac{a + b + a - b}{2} = a = \max(a, b)$.
- Si $a < b$: $|a - b| = b - a$ et $\frac{a + b + b - a}{2} = b = \max(a, b)$.
- Pour le minimum, on remarque que $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$:

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

- Interprétation : on part du milieu $\frac{a+b}{2}$ et on avance ou recule de la demi-distance $\frac{|a-b|}{2}$.

Réponse. $\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Inégalité triangulaire renversée

On applique l'inégalité triangulaire à $x = (x - y) + y$:

$$|x| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

- En échangeant les rôles : $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.
- Un nombre et son opposé sont tous deux majorés par $|x - y|$: sa valeur absolue aussi.
- Conséquence : la fonction valeur absolue est « 1-lipschitzienne », donc continue.

Réponse. Triangulaire appliquée à $x = (x - y) + y$, puis symétrie.

Correction de l'exercice 6 - Encadrer une expression

- Somme : $1 + (-3) \leq x + y \leq 2 + (-1)$, soit $-2 \leq x + y \leq 1$.
- Différence : $-y \in [1; 3]$, donc $x - y = x + (-y) \in [2; 5]$.
- Produit : y est négatif, on écrit $xy = -x|y|$ avec $x|y| \in [1 \times 1; 2 \times 3] = [1; 6]$ (produit de positifs), donc $xy \in [-6; -1]$.
- Quotient : $\frac{x}{y} = -\frac{x}{|y|}$, et $\frac{1}{|y|} \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$:

$$\frac{x}{|y|} \in \left[\frac{1}{3}; 2\right] \Rightarrow \frac{x}{y} \in \left[-2; -\frac{1}{3}\right]$$

- On se ramène toujours à des positifs avant de multiplier ou d'inverser.

Réponse. $[-2; 1]$, $[2; 5]$, $[-6; -1]$, $[-2; -\frac{1}{3}]$.

Correction de l'exercice 7 - Majorer un polynôme

Par l'inégalité triangulaire, puis $|x| \leq 1$:

$$|x^2 - 2x| \leq |x|^2 + 2|x| \leq 1 + 2 = 3$$

- Atteinte : pour $x = -1$, $|1 + 2| = 3$.
- La borne est donc la meilleure possible. En général, l'inégalité triangulaire donne une borne correcte mais pas toujours optimale ; ici elle l'est car les deux termes x^2 et $-2x$ sont de même signe en $x = -1$.

Réponse. $|x^2 - 2x| \leq |x|^2 + 2|x| \leq 3$; atteinte en $x = -1$.

Correction de l'exercice 8 - Carré d'une somme

On étudie le signe de la différence :

$$2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$$

- L'inégalité est donc vraie, avec égalité si et seulement si $a = b$.
- Conséquence : $|a + b| \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Méthode générale : pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur différence, qu'on cherche à écrire comme un carré ou un produit.

Réponse. Différence = $(a - b)^2 \geq 0$; égalité si $a = b$.

Correction de l'exercice 9 - Un réel plus son inverse

Pour $x > 0$, on multiplie par $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

- La dernière inégalité est vraie, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
- Pour $x < 0$: on applique le résultat à $-x > 0$: $-x - \frac{1}{x} \geq 2$, donc $x + \frac{1}{x} \leq -2$.
- Ainsi, $x + \frac{1}{x}$ ne prend jamais de valeur dans $] -2 ; 2[$.

Réponse. $(x - 1)^2 \geq 0$; pour $x < 0$, $x + \frac{1}{x} \leq -2$.

Correction de l'exercice 10 - Cauchy-Schwarz dans le plan

On développe :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0$$

- (identité de Lagrange). L'inégalité est donc vraie.
- Égalité si et seulement si $ad = bc$, c'est-à-dire si les vecteurs (a, b) et (c, d) sont colinéaires.
- Interprétation : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ pour $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$.

Réponse. Différence = $(ad - bc)^2$; égalité si les vecteurs sont colinéaires.

Correction de l'exercice 11 - Une inéquation avec racine

La racine impose $x \geq -2$. On distingue selon le signe de x , car on ne peut élever au carré que des positifs.

- Si $-2 \leq x < 0$: le membre de gauche est positif, le droit négatif : l'inéquation est vraie.
- Si $x \geq 0$: les deux membres sont positifs, donc

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow x+2 > x^2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

- soit $0 \leq x < 2$ dans ce cas.
- Solution : $[-2; 0[\cup [0; 2[= [-2; 2[$. Contrôle : $x = 2$ donne $2 > 2$, faux ; $x = -2$ donne $0 > -2$, vrai.

Réponse. $[-2; 2[$.

Correction de l'exercice 12 - Une minoration de l'inverse

Comme $1 + x > 0$, on peut multiplier par $1 + x$ sans changer le sens :

$$\frac{1}{1+x} \geq 1-x \Leftrightarrow 1 \geq (1-x)(1+x) = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

- La dernière inégalité est vraie : l'inégalité demandée aussi, avec égalité seulement en $x = 0$.
- Interprétation : la tangente en 0 à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, d'équation $y = 1 - x$, est en dessous de la courbe (la fonction est convexe).

Réponse. Équivaut à $x^2 \geq 0$ (multiplication par $1+x > 0$).

Correction de l'exercice 13 - Proche de 2, carré proche de 4

On factorise : $|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|$. Si $|x - 2| \leq 0,1$, alors $x \in [1,9; 2,1]$ et $|x + 2| \leq 4,1$:

$$|x^2 - 4| \leq 0,1 \times 4,1 = 0,41$$

- Pour la seconde question, on impose d'abord $\delta \leq 1$; alors $x \in [1; 3]$ et $|x + 2| \leq 5$, donc $|x^2 - 4| \leq 5\delta$.
- Il suffit que $5\delta \leq 0,01$: $\delta = 0,002$ convient.
- C'est exactement le raisonnement qui prouve la continuité de $x \mapsto x^2$ en 2.

Réponse. $|x - 2| |x + 2| \leq 0,1 \times 4,1$; $\delta = 0,002$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : en élevant au carré, l'égalité équivaut à $2xy = 2|xy|$, c'est-à-dire $xy \geq 0$.

$$(|x| + |y|)^2 - (x + y)^2 = 2(|xy| - xy)$$

b) **Faux** : $x = 0, y = 1$ donne $1 \leq -1$. C'est l'inégalité inverse qui est vraie : $|x| - |y| \leq |x - y|$.

c) **Vrai** : $x^2 = |x|^2$, et $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) **Faux** : $x = -3 < y = 1$, mais $9 > 1$.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une inéquation par cas

Le membre de gauche est positif, donc les solutions vérifient $x \geq 0$. On distingue selon le signe de $x^2 - 4$.

- **Cas** $x \geq 2$: $x^2 - 4 \leq 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Avec $x \geq 2$: $[2; 4]$.
- **Cas** $0 \leq x < 2$: $4 - x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \geq 0$, soit $x \geq 1$ ici. D'où $[1; 2[$.

$$S = [1; 2[\cup [2; 4] = [1; 4]$$

— Contrôles : $x = 1$: $|-3| = 3 \leq 3$; $x = 4$: $12 \leq 12$; $x = \frac{1}{2}$: $3,75 > 1,5$, non solution.

Réponse. $[1; 4]$.