

Plaquette 1 – Majorants, borne supérieure, densité et partie entière
Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

On détermine **majorants**, **borne supérieure** et **maximum** d'une partie, on utilise la **caractérisation** de la borne supérieure (ε ou suites), et on exploite la **densité** de $\mathbb{Q}$ et la **partie entière**.

Exercice 1 – Majorants et borne supérieure

Soit $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$, $\inf A$, et dire s'ils sont atteints.

Exercice 2 – Caractérisation par epsilon

Soit $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que $\sup A = 1$ en utilisant la caractérisation.

Exercice 3 – Borne supérieure d'une réunion

Soient A et B non vides et majorées. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 4 – Partie entière

Calculer $[3,7]$, $[-3,7]$, $[-2]$, puis résoudre $[x] = 4$.

Exercice 5 – Densité de $\mathbb{Q}$

Montrer qu'entre deux réels $a < b$ il existe toujours un rationnel.

Exercice 6 – Inégalité triangulaire

Démontrer que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y .

Exercice 7 – Inf et sup d'un ensemble de quotients

Soit $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Exercice 8 – Propriété d'Archimède

Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Borne supérieure et inégalités

Soient A et B non vides majorées avec $A \subset B$. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 10 - Sup d'une somme

Soient A, B non vides majorées et $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 11 - Intervalles et bornes

Déterminer $\sup$, $\inf$, $\max$ et $\min$ (quand ils existent) de $A =]0; 1] \cup \{2\}$.

Exercice 12 - Majorant, maximum ou borne supérieure ?

Pour chacune des parties suivantes, donner l'ensemble de ses majorants, sa borne supérieure et, s'il existe, son maximum.

- a) $A = [0; 2[$
- b) $B = [0; 2]$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$
- d) $D = \mathbb{N}$

Exercice 13 - $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$. Montrer que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$, mais qu'aucun rationnel n'est le plus petit de ses majorants rationnels.

Exercice 14 - Approximation décimale

Pour $x = \sqrt{3}$, déterminer l'approximation décimale par défaut à 10^{-3} et l'encadrement correspondant.

Exercice 15 - Synthèse : borne supérieure d'une fonction

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{\mathbb{R}} f$ et dire si elle est atteinte.