

Plaquette 3 - Calculer et manipuler des bornes supérieures

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour déterminer $\sup A$, on **devine** d'abord la valeur (en calculant des éléments, en étudiant une fonction), puis on **prouve** les deux points de la caractérisation : s majore A , et s est le plus petit majorant, soit par « $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > s - \varepsilon$ », soit en exhibant une suite d'éléments de A qui tend vers s . On conclut en disant si la borne est **atteinte** (c'est alors un maximum). Pour les propriétés générales ($\sup(A + B)$, $\sup(\lambda A)$...), on démontre deux inégalités.

Exercice 1 - Une suite alternée

Soit $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$; sont-ils atteints ?

Exercice 2 - Un réel plus son inverse

Soit $B = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}$. Déterminer $\inf B$ et dire si B est majorée.

Exercice 3 - Une différence d'inverses

Soit $C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup C$ et $\inf C$.

Exercice 4 - Un ensemble défini par une inéquation

Soit $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0\}$. Déterminer D , $\sup D$ et $\inf D$.

Exercice 5 - Borne supérieure d'une somme

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, et $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 6 - Inf et sup de l'opposé

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Montrer que $-A$ est majorée et que $\inf A = -\sup(-A)$.

Exercice 7 - Multiplier par une constante

Soit A non vide et bornée, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ si $\lambda > 0$, et $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$ si $\lambda < 0$.

Exercice 8 - Inclusion et bornes

Soient $A \subset B$ deux parties non vides et bornées. Montrer que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exercice 9 - Bornes de fonctions

Déterminer, en disant si elles sont atteintes :

- a) $\sup \{x(1-x) \mid x \in [0; 1]\}$;
- b) $\sup \{x e^{-x} \mid x > 0\}$ et $\inf \{x e^{-x} \mid x > 0\}$.

Exercice 10 - Caractérisation par une suite

Soit $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que $\sup A = 1$ en utilisant la caractérisation séquentielle.

Exercice 11 - Une partie sous une autre

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $a \leq b$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 12 - Le produit, un piège

On pose $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup A \times \sup B$? Tester avec $A = B = \{-2, 1\}$. Que se passe-t-il si les éléments sont positifs ?

Exercice 13 - Exponentielle décroissante

Soit $E = \{e^{-x} \mid x \geq 0\}$. Déterminer $\sup E$ et $\inf E$; sont-ils atteints ?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- a) Si A est majorée, elle a un plus grand élément.
- b) Si $\sup A \in A$, c'est le plus grand élément de A .
- c) Une partie finie non vide a toujours un plus grand élément.
- d) Si tout élément de A est strictement inférieur à M , alors $\sup A < M$.

Exercice 15 - Synthèse : une borne non atteinte

Soit $A = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- a) Montrer que A admet un minimum.
- b) Montrer, avec la caractérisation par ε , que $\sup A = 1$.
- c) 1 est-il atteint ?