

Plaquette 4 - Partie entière, densité et approximations

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Tout calcul sur la **partie entière** repose sur l'encadrement qui la définit : $\lfloor x \rfloor = n$ si et seulement si n est un entier et $n \leq x < n + 1$. Pour prouver une identité, on écrit $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0; 1[$ et on distingue des cas selon t . La **densité** de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ se démontre avec la partie entière et la propriété d'Archimède : entre deux réels distincts, on trouve toujours un décimal, donc un rationnel. Les **approximations décimales** $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ encadrent x à 10^{-n} près.

Exercice 1 - Translater par un entier

Montrer que pour tout réel x et tout entier n , $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. Est-ce vrai si n est un réel quelconque ?

Exercice 2 - Partie entière de l'opposé

Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ selon que x est entier ou non.

Exercice 3 - Partie entière du double

Montrer que $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, et préciser quand chaque cas se produit.

Exercice 4 - Une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 3$, puis $\lfloor x \rfloor = x$.

Exercice 5 - Partie entière de la racine

Combien d'entiers $n \in \llbracket 1; 100 \rrbracket$ vérifient $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 5$? Plus généralement, combien vérifient $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ (pour $1 \leq k \leq 9$) ?

Exercice 6 - Compter des multiples

Montrer que le nombre de multiples de k (avec $k \geq 1$) dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ est $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Combien d'entiers entre 1 et 100 sont divisibles par 7 ? par 7 mais pas par 14 ?

Exercice 7 - Approximations décimales

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- Montrer que $d_n \leq x < d_n + 10^{-n}$.
- Calculer d_0, d_1, d_2, d_3 pour $x = \sqrt{2}$.
- En déduire que $d_n \rightarrow x$.

Exercice 8 - Densité des décimaux

Soient $a < b$ deux réels. Montrer qu'il existe un nombre décimal d tel que $a < d < b$.
Application : trouver un décimal entre $0,3333$ et $\frac{1}{3}$.

Exercice 9 - Densité des irrationnels

Soient $a < b$ deux réels. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$, montrer qu'il existe un irrationnel entre a et b .

Exercice 10 - Un développement périodique

Écrire $x = 0,272727\dots$ (le bloc 27 se répète indéfiniment) sous forme de fraction irréductible. Même question pour $y = 1,2\overline{3} = 1,2333\dots$

Exercice 11 - Est-ce que $0,999\dots$ vaut 1 ?

Montrer que le nombre $0,999\dots$ (une infinité de 9) est égal à 1, de deux façons.

Exercice 12 - Une limite avec la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Exercice 13 - Puissances de $1/2$

Montrer par récurrence que $2^n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ pour tous réels.
- b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ pour tous réels.
- c) Entre deux rationnels distincts, il y a un irrationnel.
- d) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

Exercice 15 - Synthèse : une somme de parties entières

Pour $m \geq 1$, calculer $S = \sum_{k=1}^{2m} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Vérifier pour $m = 2$ et $m = 3$.