

**Plaquette 5 – Problèmes : intervalles,
moyennes et borne supérieure**
Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

Les propriétés de $\mathbb{R}$ se combinent dans les problèmes : la **borne supérieure** garantit l'existence d'une limite (suites monotones, segments emboîtés) ; la **densité** permet de prolonger une propriété vraie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{R}$, à condition d'une hypothèse de continuité ; les **inégalités de moyennes** donnent des maximums et des minimums sans dérivée. Dans chaque exercice, on écrit clairement la propriété de $\mathbb{R}$ utilisée : c'est elle qui fait fonctionner la démonstration.

Exercice 1 – Reconnaître un intervalle

En utilisant la caractérisation des intervalles, montrer que $\mathbb{R}^*$ et $[0; 1] \cup [2; 3]$ ne sont pas des intervalles, et que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.

Exercice 2 – Trois moyennes

Soient $a, b > 0$. Montrer que $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (moyennes harmonique, géométrique, arithmétique).

Exercice 3 – Un produit sous contrainte

Parmi les réels positifs x et y tels que $x + y = 10$, lequel rend le produit xy maximal ?
Même question pour $x + 2y = 10$.

Exercice 4 – Suite croissante majorée

Soit (u_n) une suite croissante et majorée, et $\ell = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Démontrer que $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 5 – La somme des inverses des carrés

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que (S_n) est croissante, puis que $S_n < 2$ en utilisant $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \geq 2$. Conclure.

Exercice 6 – Segments emboîtés

Soient (a_n) croissante, (b_n) décroissante, avec $a_n \leq b_n$ pour tout n et $b_n - a_n \rightarrow 0$. Montrer que $\bigcap_n [a_n; b_n]$ contient exactement un point.

Exercice 7 - Les nombres dyadiques

Un nombre dyadique est un réel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$. Trouver un dyadique entre 0,3 et 0,35.

Exercice 8 - Prolonger par densité

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(r) = 0$ pour tout rationnel r . Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 - Le maximum de $\sin + \cos$

Déterminer $\sup \{ \sin x + \cos x \mid x \in \mathbb{R} \}$ et $\inf \{ \sin x + \cos x \mid x \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 10 - Inégalité triangulaire généralisée

Montrer par récurrence que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$: $\sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.

Exercice 11 - Arbitrairement proches

Soient x et y deux réels tels que $|x - y| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $x = y$. Même question si $x \leq y + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$: que peut-on dire ?

Exercice 12 - Majorer un produit par des carrés

Montrer que pour tous réels a et b , $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, puis que pour tout $\lambda > 0$,
 $|ab| \leq \frac{\lambda a^2}{2} + \frac{b^2}{2\lambda}$.

Exercice 13 - L'ensemble des majorants

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et $M(A)$ l'ensemble de ses majorants. Montrer que $M(A) = [\sup A; +\infty[$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) La réunion de deux intervalles qui se rencontrent est un intervalle.
- b) Une suite croissante de rationnels majorée a une limite rationnelle.
- c) Une suite décroissante minorée converge.
- d) Si $x < y + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors $x < y$.

Exercice 15 - Synthèse : une fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$ et $A = f([0; +\infty[)$.

- a) Écrire $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$ et étudier ses variations.
- b) Déterminer $\inf A$ et $\sup A$; sont-ils atteints ?
- c) Pour quels x a-t-on $f(x) \geq 1,9$?