

Plaquette 2 - Valeur absolue et inégalités

Nombres réels et borne supérieure — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

La **valeur absolue** $|x - a|$ est la distance entre x et a : $|x - a| \leq r$ décrit l'intervalle $[a - r; a + r]$. Pour une équation ou une inéquation avec plusieurs valeurs absolues, on fait une **disjonction de cas** selon le signe de chaque expression. Pour **encadrer**, on n'additionne que des inégalités de même sens, on ne multiplie que par des nombres **positifs**, et on majore une valeur absolue par l'**inégalité triangulaire**. Pour démontrer une inégalité, on étudie souvent le signe de la **différence** des deux membres, en la faisant apparaître comme un carré.

Exercice 1 - Inéquations avec une valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $|x - 3| \leq 2$; b) $|2x + 1| > 3$.

Exercice 2 - À égale distance

Résoudre $|x - 1| = |x + 2|$ de deux façons : par le calcul, puis géométriquement.

Exercice 3 - Deux valeurs absolues

Résoudre $|x - 1| + |x - 3| = 4$.

Exercice 4 - Maximum et minimum

Montrer que, pour tous réels a et b , $\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$, et trouver une formule analogue pour $\min(a, b)$.

Exercice 5 - Inégalité triangulaire renversée

Démontrer que pour tous réels x et y , $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 6 - Encadrer une expression

On suppose $1 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq -1$. Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$.

Exercice 7 - Majorer un polynôme

Montrer que si $|x| \leq 1$, alors $|x^2 - 2x| \leq 3$. Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 8 - Carré d'une somme

Démontrer que pour tous réels a et b : $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Cas d'égalité ?

Exercice 9 - Un réel plus son inverse

Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. Que se passe-t-il pour $x < 0$?

Exercice 10 - Cauchy-Schwarz dans le plan

Démontrer que pour tous réels a, b, c, d : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, en calculant la différence des deux membres.

Exercice 11 - Une inéquation avec racine

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+2} > x$.

Exercice 12 - Une minoration de l'inverse

Montrer que pour tout $x > -1$, $\frac{1}{1+x} \geq 1-x$.

Exercice 13 - Proche de 2, carré proche de 4

Montrer que si $|x-2| \leq 0,1$, alors $|x^2-4| \leq 0,41$. Comment choisir δ pour que $|x-2| \leq \delta$ garantisse $|x^2-4| \leq 0,01$?

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

Pour tous réels x et y :

- a) $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.
- b) $|x-y| \leq |x| - |y|$.
- c) $x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.
- d) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

Exercice 15 - Synthèse : une inéquation par cas

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x^2-4| \leq 3x$.