

Nombres réels et borne supérieure

Licence 1 — Fiche de révision

1. Ordre sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un **corps totalement ordonné**. Pour $x \leq y$:

$$x + z \leq y + z.$$

Si $z \geq 0$, alors $xz \leq yz$; si $z \leq 0$, alors $xz \geq yz$.

Attention : multiplier/diviser une inégalité par un réel négatif inverse son sens.

2. Majorants et extrema

Pour $A \subset \mathbb{R}$:

$$M \text{ majore } A \iff \forall a \in A, a \leq M,$$

$$m \text{ mineure } A \iff \forall a \in A, m \leq a.$$

A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Maximum :

$$M = \max A \iff M \in A \text{ et } \forall a \in A, a \leq M.$$

De même pour $\min A$.

Différence clé : un majorant n'a pas à appartenir à A . Un maximum, oui.

3. Borne supérieure / inférieure

Si A est non vide et majorée :

$$\sup A = \text{plus petit majorant de } A.$$

Si A est non vide et minorée :

$$\inf A = \text{plus grand minorant de } A.$$

Complétude de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Lien avec les extrema :

$$\sup A \in A \iff \sup A = \max A,$$

$$\inf A \in A \iff \inf A = \min A.$$

Exemple :

$$\sup]0, 1[= 1, \quad \inf]0, 1[= 0,$$

mais $]0, 1[$ n'a ni maximum ni minimum.

4. Critère en ε

$$\begin{array}{c} M = \sup A \\ \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A, a \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a. \end{array} \right. \end{array}$$

Pour $m = \inf A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A, m \leq a, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < m + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Méthode : 1) montrer que le candidat est une borne ; 2) montrer qu'il est optimal avec ε .

5. Propriétés de $\sup$ et $\inf$

Si $A \subset B$:

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf B \leq \inf A.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$:

$$\sup(A + c) = \sup A + c,$$

$$\inf(A + c) = \inf A + c.$$

Pour $\lambda > 0$:

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A, \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf A.$$

Et

$$\inf A = -\sup(-A).$$

6. Propriété d'Archimède

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Équivalent utile :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

C'est l'outil standard pour rendre $1/n$ aussi petit que souhaité.

7. Densité

Rationnels :

$$\forall a < b, \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b.$$

Irrationnels :

$$\forall a < b, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b.$$

Donc entre deux réels distincts, il y a à la fois des rationnels et des irrationnels.

8. Partie entière

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

$\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $\leq x$.

$$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

Partie fractionnaire :

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Exemples :

$$\lfloor 3.7 \rfloor = 3, \quad \lfloor -2.3 \rfloor = -3.$$

Piège : pour un réel négatif, la partie entière n'est pas la troncature vers 0.

9. Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x - a|$ est la distance entre x et a .

Formules essentielles :

$$|xy| = |x||y|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Pour $r > 0$:

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r,$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r.$$

10. Pièges à éviter

- Confondre $\sup A$ et $\max A$.
- Croire que $\sup A \in A$ automatiquement.
- Oublier que le critère en ε demande *tout* $\varepsilon > 0$.
- Écrire $+\infty \in \mathbb{R}$: faux.
- Mal gérer les nombres négatifs avec $\lfloor x \rfloor$.
- Oublier que $|x - a|$ représente une distance.

11. Réflexes d'examen

Pour montrer $M = \sup A$:

1. prouver $a \leq M$ pour tout $a \in A$;
2. fixer $\varepsilon > 0$;
3. construire $a \in A$ avec $M - \varepsilon < a$.

Exemple-type :

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \geq 1 \right\}.$$

Comme $n/(n+1) < 1$, 1 majore A . Et

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc $\sup A = 1$, sans maximum.

12. Formules flash

$$\sup]a, b[= b, \quad \inf]a, b[= a$$

$$\sup A \in A \implies \max A = \sup A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 1/n < \varepsilon$$

$$|x - a| < r \iff x \in]a - r, a + r[$$