

Nombres réels et borne supérieure

Licence 1 (L1) — Analyse : fondations de $\mathbb{R}$

Idée directrice. Dans $\mathbb{Q}$, certaines limites naturelles $\dot{z}$ manquent. Dans $\mathbb{R}$, la propriété de la borne supérieure garantit qu'une partie non vide et majorée possède une plus petite borne supérieure. Cette complétude est l'un des piliers de l'analyse.

Objectifs. À la fin du chapitre, on doit savoir : utiliser l'ordre sur $\mathbb{R}$; distinguer majorant, maximum et borne supérieure ; caractériser $\sup A$ et $\inf A$ avec ε ; exploiter la propriété d'Archimède ; démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels ; manipuler la partie entière ; utiliser la valeur absolue comme distance et appliquer les inégalités triangulaires.

1. Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$

1.1. Structure algébrique

Les réels forment un **corps commutatif** : on dispose des opérations $+$ et $\times$, avec 0 et 1, et tout réel non nul x possède un inverse $x^{-1} = 1/x$. Les règles usuelles de calcul sont donc valables : associativité, commutativité, distributivité, simplification, etc.

1.2. Ordre total compatible avec les opérations

L'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est **total** : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Il est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

$$x \leq y, z \geq 0 \implies xz \leq yz, \quad x \leq y, z \leq 0 \implies xz \geq yz.$$

Piège classique

Multiplier une inégalité par un nombre négatif **inverse le sens** de l'inégalité. De même, l'application $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$: si $0 < x < y$, alors $1/y < 1/x$.

1.3. Intervalles

Pour $a < b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

On définit de même $[a, b[,]a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[$, etc. Les symboles $\pm\infty$ ne sont **pas** des nombres réels : une borne infinie n'est jamais incluse.

2. Majorants, minorants, maximum et minimum

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si $\forall a \in A, a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si $\forall a \in A, m \leq a$.
- A est **majorée** si elle possède au moins un majorant, et **minorée** si elle possède au moins un minorant.
- A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition

Un réel M est le **maximum** de A , noté $\max A$, si

$$M \in A \quad \text{et} \quad \forall a \in A, a \leq M.$$

De même, $m = \min A$ si $m \in A$ et $m \leq a$ pour tout $a \in A$.

Exemple

Pour $A =]0, 1[$, le nombre 1 est un majorant, mais A n'a pas de maximum : $1 \notin A$ et, pour tout $a < 1$, le nombre $(a + 1)/2$ appartient encore à A et est plus grand que a .

Piège classique

« M majore A » ne signifie pas « M est le maximum de A ». Un majorant peut être très loin de l'ensemble, et un maximum doit obligatoirement appartenir à A .

3. Borne supérieure et borne inférieure

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée. Sa **borne supérieure**, notée $\sup A$, est le **plus petit des majorants** de A . Autrement dit, $s = \sup A$ si :

$$\boxed{\forall a \in A, a \leq s} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall M < s, M \text{ n'est pas un majorant de } A.}$$

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée. Sa **borne inférieure**, notée $\inf A$, est le **plus grand des minorants** de A .

Axiome de complétude de $\mathbb{R}$

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Par symétrie, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Cette propriété distingue fondamentalement $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Par exemple,

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$

est non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$, mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car celle-ci devrait être $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.1. Lien avec maximum et minimum

Propriété

Si A admet un maximum, alors

$$\max A = \sup A.$$

Réciproquement, si $\sup A \in A$, alors $\sup A = \max A$. De même pour $\min A$ et $\inf A$.

Exemple

$$\sup]0, 1[= 1, \quad \inf]0, 1[= 0,$$

mais ni 0 ni 1 n'appartiennent à l'ensemble. En revanche,

$$\sup [0, 1] = \max [0, 1] = 1, \quad \inf [0, 1] = \min [0, 1] = 0.$$

4. Caractérisation de la borne supérieure par ε

Caractérisation fondamentale

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $M \in \mathbb{R}$. Alors

$$M = \sup A$$

si et seulement si :

$$\boxed{\forall a \in A, a \leq M} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < a.}$$

Autrement dit : M majore A , mais on trouve toujours des éléments de A arbitrairement proches de M par la gauche.

Pourquoi cette condition ? Si pour un certain $\varepsilon > 0$ aucun élément de A ne dépassait $M - \varepsilon$, alors $M - \varepsilon$ serait lui-même un majorant de A , strictement plus petit que M : contradiction avec le caractère minimal de M .

Montrer que $M = \sup A$

Procéder en deux temps :

1. **Majorant** : montrer que $a \leq M$ pour tout $a \in A$.
2. **Optimalité** : pour tout $\varepsilon > 0$, construire un $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$.

Pour une borne inférieure m , remplacer la seconde condition par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a < m + \varepsilon.$$

Exemple : $\sup\{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = 3$

Posons $A =]-\infty, 3[$. D'abord, 3 majore A . Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Le réel

$$a = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$$

appartient à A et vérifie $3 - \varepsilon < a$. Donc $3 = \sup A$.

4.1. Quelques propriétés utiles

Pour $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides et bornés lorsque nécessaire :

- si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$;
- pour $c \in \mathbb{R}$, $\sup(A + c) = \sup A + c$ et $\inf(A + c) = \inf A + c$;
- si $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ et $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$;
- si $\lambda < 0$, les rôles s'inversent : $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$;
- $\inf A = -\sup(-A)$, où $-A = \{-a : a \in A\}$.

5. Propriété d'Archimède

Propriété d'Archimède

Pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que

$$n > x.$$

Équivalamment, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Idée de démonstration. Si $\mathbb{N}$ était majoré dans $\mathbb{R}$, soit $s = \sup \mathbb{N}$. La caractérisation par ε avec $\varepsilon = 1$ donnerait un entier $n > s - 1$, donc $n + 1 > s$, contradiction puisque $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Propriété

Pour tous $a < b$ réels, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Cette formulation permet de fabriquer des nombres dans un intervalle arbitrairement petit.

6. Densité des rationnels et des irrationnels

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est **dense dans** $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide contient un élément de D :

$$\forall a < b, \exists d \in D \text{ tel que } a < d < b.$$

Densité de $\mathbb{Q}$

Pour tous réels $a < b$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a < q < b.$$

Démonstration-type. Par Archimède, choisir $n \geq 1$ tel que $1/n < b - a$. Il existe alors un entier p satisfaisant

$$na < p \leq na + 1.$$

D'où $a < p/n \leq a + 1/n < b$. Ainsi $q = p/n \in \mathbb{Q}$ convient.

Densité des irrationnels

Pour tous réels $a < b$, il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que

$$a < x < b.$$

Une preuve courte. L'intervalle $]a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}[$ contient un rationnel non nul q par densité de $\mathbb{Q}$. Alors $q\sqrt{2} \in]a, b[$ et $q\sqrt{2}$ est irrationnel.

Piège classique

Dense ne signifie pas qu'il contient presque tous les réels. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous deux denses : entre deux réels distincts, il y a à la fois un rationnel et un irrationnel.

7. Partie entière

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

Cet entier est la **partie entière** de x , notée

$$\lfloor x \rfloor = n.$$

Ainsi,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exemple

$$\lfloor 3.7 \rfloor = 3, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor -2.3 \rfloor = -3.$$

La dernière égalité rappelle que la partie entière est le **plus grand entier inférieur ou égal** au réel, et non sa troncature vers 0.

Propriété

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

De plus,

$$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1.$$

La **partie fractionnaire** est

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

8. Valeur absolue et distance

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ est la distance de x à 0, et $|x - a|$ est la distance entre x et a .

Propriété

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \iff x = 0,$$

$$|xy| = |x| |y|, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0),$$

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|} \quad (\text{inégalité triangulaire}),$$

$$\boxed{||x| - |y|| \leq |x - y|} \quad (\text{inégalité triangulaire renversée}).$$

8.1. Traduire les inégalités avec une valeur absolue

Pour $r > 0$:

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r,$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r,$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \text{ ou } x > a + r.$$

Majorer une expression avec l'inégalité triangulaire

Pour estimer $|u + v|$, on écrit

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

Pour comparer deux modules, utiliser souvent

$$||u| - |v|| \leq |u - v|.$$

Ces deux formes seront omniprésentes dans les preuves de limites et de continuité.

9. Méthodes de rédaction à maîtriser

9.1. Prouver qu'un nombre est une borne supérieure

Il ne suffit jamais d'écrire $\acute{\text{on voit que z}}$. La rédaction standard est :

1. montrer que le candidat est un majorant ;
2. montrer qu'aucun nombre strictement plus petit ne peut majorer, typiquement par le critère en ε .

9.2. Prouver qu'un ensemble n'a pas de maximum

Une méthode fréquente consiste à prendre un élément arbitraire $x \in A$ et à construire $y \in A$ tel que $y > x$. Cela exclut l'existence d'un plus grand élément.

9.3. Manipuler une partie entière

Dès que $n = \lfloor x \rfloor$, écrire immédiatement

$$n \leq x < n + 1.$$

C'est cette double inégalité, et non une intuition graphique, qui permet de poursuivre la démonstration.

10. Exercices corrigés

Exercice 1 — Maximum et borne supérieure

Soit

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Déterminer $\sup A$ et dire si A possède un maximum.

Correction. Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

donc 1 majore A . Soit $\varepsilon > 0$. Par Archimède, choisir n tel que $1/(n+1) < \varepsilon$. Alors

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \in A.$$

Donc $\sup A = 1$. Comme $1 \notin A$, A n'a pas de maximum.

Exercice 2 — Borne inférieure

Soit $B = \{x^2 + 2 : x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $\inf B$.

Correction. Comme $x^2 \geq 0$, on a $x^2 + 2 \geq 2$, donc 2 est un minorant. De plus $2 = 0^2 + 2 \in B$. Ainsi

$$\inf B = \min B = 2.$$

Exercice 3 — Partie entière

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x \rfloor = 2$.

Correction.

$$\lfloor x \rfloor = 2 \iff 2 \leq x < 3.$$

L'ensemble des solutions est donc $[2, 3[$.

Exercice 4 — Valeur absolue

Résoudre $|2x - 3| < 5$.

Correction.

$$|2x - 3| < 5 \iff -5 < 2x - 3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \iff -1 < x < 4.$$

Exercice 5 — Densité

Montrer qu'entre deux réels distincts il existe une infinité de rationnels.

Correction. Soient $a < b$. La densité donne un rationnel $q_1 \in]a, b[$. Puis elle donne $q_2 \in]a, q_1[$, puis $q_3 \in]a, q_2[$, etc. On construit ainsi une infinité de rationnels distincts dans $]a, b[$.

11. À retenir absolument

- $\max A$ doit appartenir à A ; $\sup A$ peut ne pas appartenir à A .
- $M = \sup A$ signifie : M majore A et les éléments de A s'approchent arbitrairement de M par valeurs inférieures.
- La complétude de $\mathbb{R}$ garantit l'existence de la borne supérieure pour toute partie non vide majorée.
- Archimède : les entiers dépassent tout réel, et $1/n$ devient arbitrairement petit.
- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous deux denses dans $\mathbb{R}$.
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- $|x - a|$ est une distance ; $|x + y| \leq |x| + |y|$.