

Plaquette 1 - Division euclidienne, racines, factorisation et éléments simples

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Degré et division.

- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$; $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- **Division euclidienne** : $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$, de façon **unique**.
- $B \mid A \Leftrightarrow$ le reste est nul.

Racines.

- a est racine de $P \Leftrightarrow (X - a) \mid P$; plus généralement, $P(a)$ est le **reste** de la division par $X - a$.
- **Multiplicité** m : $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
- Un polynôme de degré n non nul a **au plus n racines** ; s'il en a une infinité, il est nul.
- **D'Alembert-Gauss** : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est **scindé**.
- Dans $\mathbb{R}[X]$: les racines complexes vont par **paires conjuguées** ; les irréductibles sont les degrés 1 et les degrés 2 de discriminant négatif.
- **Relations coefficients-racines** (degré n) : $\sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Fractions rationnelles. $F = \frac{P}{Q}$ irréductible.

- **Partie entière** : par division euclidienne, nulle si $\deg P < \deg Q$.
- **Décomposition** (pôles a_i d'ordre m_i) :

$$F = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k}$$

- **Pôle simple** : $\lambda = [(X - a)F]_{X=a}$, ou $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.
- **Dans $\mathbb{R}$** : s'ajoutent les éléments $\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^k}$ avec $p^2 - 4q < 0$.
- **Applications** : primitives (ln, arctan), sommes **télescopiques**, développements en série.

Correction de l'exercice 1 - Division euclidienne

On applique le schéma de division (ou Horner).

- $X^3 : X = X^2$. On soustrait $X^2(X - 2) = X^3 - 2X^2$: reste $3X - 1$.
- $3X : X = 3$. On soustrait $3(X - 2) = 3X - 6$: reste 5.
- **Résultat** : $Q = X^2 + 3$ et $R = 5$.
- **Vérification** : $(X - 2)(X^2 + 3) + 5 = X^3 + 3X - 2X^2 - 6 + 5 = X^3 - 2X^2 + 3X - 1 \checkmark$
- **Contrôle par la valeur** : le reste d'une division par $X - 2$ vaut $A(2) = 8 - 8 + 6 - 1 = 5 \checkmark$
- **Conséquence** : 2 n'est **pas** racine de A (le reste est non nul).

Réponse. $Q = X^2 + 3$, $R = 5$.

Correction de l'exercice 2 - Reste sans division

- Le reste est de degré ≤ 1 : on l'écrit $R = aX + b$.
- **Évaluation aux racines** de $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$:
- en $X = 1$: $1 + 1 + 1 = 3 = a + b$;
- en $X = -1$: $1 - 1 + 1 = 1 = -a + b$ (car 2026 est **pair**).
- **Résolution** : en additionnant, $2b = 4$ donc $b = 2$; puis $a = 1$.
- **Reste** : $R = X + 2$.
- **Vérification** : en $X = 1$, $R(1) = 3$ ✓ ; en $X = -1$, $R(-1) = 1$ ✓
- **Méthode générale** : quand le diviseur est **scindé à racines simples**, il suffit d'évaluer — aucune division à effectuer.
- **Attention à la parité** : si l'exposant était impair, on aurait $X^{2027} + X + 1$ et $-1 - 1 + 1 = -1$, donnant un autre reste.

Réponse. $R = X + 2$.

Correction de l'exercice 3 - Factorisation à partir d'une racine

- **Recherche d'une racine rationnelle** : les candidats divisent le terme constant 6.
- $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ✓ — donc $(X - 1) \mid P$.
- **Division** : $P = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$.
- **Contrôle** : $(X - 1)(X^2 - 5X + 6) = X^3 - 5X^2 + 6X - X^2 + 5X - 6 = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ ✓
- **Second facteur** : $X^2 - 5X + 6$ a pour racines 2 et 3 (somme 5, produit 6).
- **Factorisation complète** : $P = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
- **Contrôle par les relations** : somme des racines $1 + 2 + 3 = 6 = -\frac{-6}{1}$ ✓ ; produit $6 = (-1)^3 \times \frac{-6}{1}$ ✓
- **Astuce de reconnaissance** : les coefficients 1, -6, 11, -6 sont ceux de $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ — un motif classique à mémoriser.

Réponse. $P = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

Correction de l'exercice 4 - Racine multiple

- **Factorisation évidente** : $P = X(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) = X(X + 1)^3$.
- **Multiplicité de -1** : 3.
- **Vérification par les dérivées** :
- $P(-1) = (-1) \times 0 = 0$;
- $P' = (X + 1)^3 + 3X(X + 1)^2 = (X + 1)^2(4X + 1)$, donc $P'(-1) = 0$;
- $P'' = 2(X + 1)(4X + 1) + 4(X + 1)^2 = (X + 1)(12X + 6)$, donc $P''(-1) = 0$;
- $P''' = 12(X + 1) + 12X + 6 = 24X + 18$, donc $P'''(-1) = -6 \neq 0$ ✓
- La première dérivée non nulle en -1 est la **troisième** : multiplicité 3, confirmée.
- **Reconnaissance** : $X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)^3$ — c'est le développement du binôme, à repérer immédiatement.

Réponse. Multiplicité 3 ; $P = X(X + 1)^3$.

Correction de l'exercice 5 - Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- **Identité remarquable** : $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.
- **Dans $\mathbb{R}[X]$** : c'est la factorisation **complète**, car $X^2 + 1$ est **irréductible** (discriminant $-4 < 0$).
- **Dans $\mathbb{C}[X]$** : $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, donc

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$
- **Interprétation** : les racines sont les **racines quatrièmes de l'unité** $\{1, -1, i, -i\}$, sommets d'un carré sur le cercle unité.
- **Contrôle** : leur somme est nulle (pas de terme en X^3) ✓ et leur produit vaut $-1 = (-1)^4 \times \frac{-1}{1}$ ✓
- **Principe général** : dans $\mathbb{C}$, tout polynôme est **scindé** (d'Alembert-Gauss) ; dans $\mathbb{R}$, il reste des facteurs quadratiques.

Réponse. $(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ dans $\mathbb{R}$; quatre facteurs linéaires dans $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 6 - Relations coefficients-racines

- **Somme et produit** : $s = x_1 + x_2 = 5$ et $p = x_1 x_2 = 3$.
- **Somme des carrés** :

$$x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p = 25 - 6 = 19$$
- **Somme des inverses** :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{3} \approx 1,667$$
- **Contrôle numérique** : les racines sont $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$, soit 4,3028 et 0,6972.
- $4,3028^2 + 0,6972^2 \approx 18,514 + 0,486 = 19,0$ ✓
- $\frac{1}{4,3028} + \frac{1}{0,6972} \approx 0,2324 + 1,4343 = 1,6667$ ✓
- **Puissance de la méthode** : on obtient ces valeurs **sans calculer les racines** — indispensable quand elles ne sont pas « belles ».

Réponse. $x_1^2 + x_2^2 = 19$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Interpolation

Méthode par identification. On pose $P = aX^2 + bX + c$.

- $P(0) = c = 1$.
- $P(1) = a + b + 1 = 3$, donc $a + b = 2$.
- $P(2) = 4a + 2b + 1 = 7$, donc $4a + 2b = 6$, soit $2a + b = 3$.
- **Résolution** : par soustraction, $a = 1$, puis $b = 1$.
- **Résultat** : $P = X^2 + X + 1$.
- **Vérifications** : $P(1) = 3$ ✓ ; $P(2) = 4 + 2 + 1 = 7$ ✓
- **Unicité** : il existe un **unique** polynôme de degré $\leq n$ passant par $n + 1$ points d'abscisses distinctes (déterminant de **Vandermonde** non nul).
- **Contrôle par les différences** : les écarts 2 puis 4 ont une différence seconde constante égale à $2 = 2a$ ✓

Réponse. $P = X^2 + X + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Éléments simples, pôles simples

— **Forme** : $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$.

— $a = \left[\frac{1}{X+1} \right]_{X=0} = 1$; $b = \left[\frac{1}{X} \right]_{X=-1} = -1$.

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

— **Contrôle** en $X = 1$: $\frac{1}{2}$ des deux côtés ✓

— **Somme télescopique** :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

— **Contrôles** : $n = 1$ donne $\frac{1}{2}$ ✓ ; $n = 3$ donne $\frac{3}{4}$, et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{3}{4}$ ✓

— **Limite** : la somme tend vers 1 — la série converge.

— **Portée** : décomposer puis télescoper est la méthode pour sommer une fraction rationnelle en k .

Réponse. $F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$ et la somme vaut $\frac{n}{n+1}$.

Correction de l'exercice 9 - Éléments simples avec pôle double

— **Forme** : $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.

— **Coefficient** a : on multiplie par X et on évalue en 0 : $a = \frac{3}{1} = 3$.

— **Coefficient** c : on multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 : $c = \frac{4}{1} = 4$.

— **Coefficient** b : on évalue F en $X = -1$:

$$F(-1) = \frac{2}{(-1)(4)} = -\frac{1}{2} = \frac{3}{-1} + \frac{b}{-2} + \frac{4}{4}$$

— Soit $-\frac{1}{2} = -3 - \frac{b}{2} + 1 = -2 - \frac{b}{2}$, d'où $\frac{b}{2} = -\frac{3}{2}$ et $b = -3$.

— **Résultat** : $F = \frac{3}{X} - \frac{3}{X-1} + \frac{4}{(X-1)^2}$.

— **Contrôle en** $X = 2$: $F(2) = \frac{5}{2 \times 1} = 2,5$, et $\frac{3}{2} - 3 + 4 = 2,5$ ✓

— **Contrôle asymptotique** : $XF(X) \rightarrow 0$, donc la somme des coefficients des pôles simples doit être nulle : $3 - 3 = 0$ ✓

Réponse. $F = \frac{3}{X} - \frac{3}{X-1} + \frac{4}{(X-1)^2}$.

Correction de l'exercice 10 - Partie entière

— **Degrés** : $3 > 2$, il y a une **partie entière**.

— **Division** : $X^3 = X(X^2 - 1) + X$, donc

$$F = X + \frac{X}{X^2 - 1}$$

— **Décomposition du reste** : $\frac{X}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

— **Résultat** :

$$F = X + \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$$

- **Contrôle en** $X = 2$: $F(2) = \frac{8}{3} \approx 2,667$, et $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \checkmark$
- **Lecture graphique** : la droite $y = x$ est **asymptote oblique** en $\pm\infty$.
- **Erreur à éviter** : oublier la partie entière rendrait le système d'identification **incompatible** — toujours comparer les degrés d'abord.

Réponse. $F = X + \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$.

Correction de l'exercice 11 - Élément de seconde espèce

- **Forme** : $F = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$ (X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$).
- **Coefficient** a : on multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a = \frac{2}{2} = 1$.
- **Réduction au même dénominateur** :

$$\frac{a(X^2+1) + (bX+c)(X-1)}{(X^2+1)(X-1)} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b)X + (a-c)}{(X^2+1)(X-1)}$$
- **Identification** avec $2X$: $a+b=0$ donc $b=-1$; $a-c=0$ donc $c=1$; et $c-b=1+1=2 \checkmark$ (cohérent).
- **Résultat** : $F = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+1}{X^2+1}$.
- **Contrôle en** $X = 0$: $F(0) = 0$, et $-1+1=0 \checkmark$
- **Application** : une primitive est $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x$ — les trois types de termes qu'on obtient toujours.

Réponse. $F = \frac{1}{X-1} + \frac{1-X}{X^2+1}$.

Correction de l'exercice 12 - Polynômes et équations fonctionnelles

Étape 1 : les constantes conviennent. Si $P = c$, l'égalité est évidente.

Étape 2 : ce sont les seules. Supposons $\deg P = n \geq 1$.

- Le polynôme $Q = P(X+1) - P(X)$ est **nul** par hypothèse.
- Or, en développant, le terme de degré $n-1$ de Q vaut na_n où a_n est le coefficient dominant de P (le terme de degré n se **compense**).
- Q étant nul, $na_n = 0$ — impossible avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.
- **Conclusion** : P est **constant**.
- **Argument alternatif** : si P n'est pas constant, il prend une valeur c au plus n fois. Mais $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ donnerait une **infinité** d'antécédents de $P(0)$ — contradiction.
- **Contraste** : parmi les **fonctions** quelconques, il existe une infinité de solutions 1-périodiques (sinus, indicatrices...). C'est la rigidité **polynomiale** qui force la constance.

Réponse. Seuls les polynômes **constants**.

Correction de l'exercice 13 - PGCD par l'algorithme d'Euclide

a) On divise A par B (degrés 4 et 3) : le quotient commence par X , et

$$A = (X - 1)B + (3X^2 - 6X + 3)$$

— **Contrôle** : $(X - 1)(X^3 - 3X + 2) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$, et
 $A - (X - 1)B = 3X^2 - 6X + 3$ ✓

— On divise B par $R_1 = 3X^2 - 6X + 3 = 3(X - 1)^2$: $B = \left(\frac{X}{3} + \frac{2}{3}\right)R_1 + 0$, car
 $(X + 2)(X - 1)^2 = X^3 - 3X + 2$ ✓

b) Le dernier reste non nul est R_1 ; le PGCD est le **polynôme unitaire** associé :

$$D = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

c) $A(1) = 0$: $A = (X - 1)(X^3 - 1) = (X - 1)^2(X^2 + X + 1)$.

— $B(1) = 0$: $B = (X - 1)(X^2 + X - 2) = (X - 1)^2(X + 2)$.

— Facteurs communs avec le plus petit exposant : $(X - 1)^2$ ✓

d) 1 est racine **double** de A et de B ; les autres racines (j, j^2 pour A , -2 pour B) ne sont pas communes.

— **Méthode** : l'algorithme d'Euclide marche pour les polynômes comme pour les entiers ; on normalise à la fin (PGCD **unitaire**).

Réponse. $A = (X - 1)B + 3(X - 1)^2$; $\text{pgcd}(A, B) = (X - 1)^2$.

Correction de l'exercice 14 - Somme télescopique

a) Trois pôles simples $0, -1, -2$: $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$, avec la règle $\lambda = [(X - p)F]_{X=p}$:

$$a = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{(-1) \times 1} = -1, \quad c = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

— $F = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$.

b) $\frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{(X+1)(X+2)} = \frac{(X+2) - X}{X(X+1)(X+2)} = \frac{2}{X(X+1)(X+2)}$ ✓

c) Avec $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$, b) s'écrit $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}(u_k - u_{k+1})$: la somme **télescope**.

$$S_n = \frac{1}{2}(u_1 - u_{n+1}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

— Limite : $S_n \rightarrow \frac{1}{4}$.

d) $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{1}{6}$ ✓

— $n = 7$: la formule donne $\frac{1}{4} - \frac{1}{144} = \frac{35}{144}$, et la somme directe (calcul exact en fractions) vaut aussi $\frac{35}{144}$ ✓

— **Méthode** : on regroupe les éléments simples pour faire apparaître une **différence de termes consécutifs**.

Réponse. $F = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$; $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : primitive d'une fraction rationnelle

— **Décomposition** : $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$.

— **Contrôle** : $\frac{(x+1)-(x-1)}{2(x^2-1)} = \frac{2}{2(x^2-1)} \checkmark$

— **Primitive** sur $]1; +\infty[$:

$$\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$$

— **Évaluation** :

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

— **Valeur numérique** : $\frac{0,4055}{2} \approx 0,2027$.

— **Contrôle d'ordre de grandeur** : sur $[2; 3]$, l'intégrande varie de $\frac{1}{3} \approx 0,333$ à $\frac{1}{8} = 0,125$; une aire d'environ 0,20 sur une largeur 1 est cohérente $\checkmark$

— **Méthode générale** : décomposition en éléments simples, puis primitives en $\ln$ (pôles simples), en $\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$ (pôles multiples) et en arctan (seconde espèce).

Réponse. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 0,203$.