

**Plaquette 4 - Fractions rationnelles :
décompositions, sommes et intégrales**

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Décomposition. Si $F = \frac{P}{Q}$ irréductible, $Q = \prod (X - a_i)^{m_i}$ dans $\mathbb{C}[X]$:

$$F = E + \sum_i \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k}, \quad \lambda_{i,m_i} = \left[(X - a_i)^{m_i} F \right]_{X=a_i}$$

- **Pôle simple** : $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ (pratique pour $Q = X^n - 1$).
- **Pôle multiple** : on pose $Y = X - a$ et on fait une division suivant les puissances croissantes, ou on développe.
- **Limite** : si $\deg P < \deg Q$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \sum_i \lambda_{i,1}$ (somme des coefficients des termes en $\frac{1}{X - a_i}$).
- **Sur $\mathbb{R}$** : termes $\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^k}$ ($p^2 - 4q < 0$), obtenus en regroupant les pôles conjugués.

Dérivée logarithmique. Si $P = c \prod (X - a_i)^{m_i}$:

$$\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{m_i}{X - a_i}$$

- **Primitives** : $\int \frac{dx}{x - a} = \ln |x - a|$; $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta}$.
- **Dérivée n -ième** : $\left(\frac{1}{x - a} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x - a)^{n+1}}$.

Correction de l'exercice 1 - Décomposer $1/(X^n - 1)$

a) $Q = X^n - 1$ a n racines distinctes ω^k : pôles simples. Avec $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$, $P = 1$ et $Q' = nX^{n-1}$:

$$\lambda_k = \frac{1}{n \omega^{k(n-1)}} = \frac{\omega^k}{n \omega^{kn}} = \frac{\omega^k}{n}$$

— (On a multiplié numérateur et dénominateur par ω^k , et $\omega^{kn} = 1$.)

b) $\deg 1 < \deg Q$: partie entière nulle, d'où la formule.

c) $n = 3$, $\omega = j$: $F = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} \right)$.

— On regroupe les deux derniers : $\frac{j(X-j^2) + j^2(X-j)}{(X-j)(X-j^2)} = \frac{(j+j^2)X-2}{X^2+X+1} = \frac{-X-2}{X^2+X+1}$ (car $j^3 = 1, j+j^2 = -1$).

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$$

d) En $X = 0$: $F(0) = -1$ et $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$ ✓

— $\chi F(\chi) \rightarrow 0$ en $+\infty$; la somme des coefficients des termes « en $\frac{1}{X}$ » vaut $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ✓ (en a) : $\frac{1}{n} \sum \omega^k = 0$).

Réponse. $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_k \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$; $\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$.

Correction de l'exercice 2 - Dérivée logarithmique et sommes sur les racines

a) On dérive le produit (formule de Leibniz) : $P' = c \sum_i m_i (X - a_i)^{m_i-1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^{m_j}$. En divisant par P , chaque terme se simplifie en $\frac{m_i}{X - a_i}$.

— C'est la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$: pôles **simples** aux racines, coefficients égaux aux **multiplicités**.

b) Avec les racines simples x_i : $\frac{P'(2)}{P(2)} = \sum_i \frac{1}{2 - x_i}$.

$$P(2) = 8 - 2 + 1 = 7, \quad P'(2) = 3 \times 4 - 1 = 11 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{1}{2 - x_i} = \frac{11}{7}$$

— **Contrôle numérique** avec les racines approchées $(-1,3247$ et $0,6624 \pm 0,5623i)$: $1,57143$ ✓

c) $P = X^n - 1$, racines simples ω^k : $\sum_k \frac{1}{2 - \omega^k} = \frac{P'(2)}{P(2)} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n - 1}$.

d) $n = 2$: racines ± 1 , $\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+1} = \frac{4}{3}$; formule : $\frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$ ✓

— **Méthode** : une somme $\sum \frac{1}{a - x_i}$ sur les racines d'un polynôme se calcule **sans les racines**, par $\frac{P'(a)}{P(a)}$.

Réponse. $\frac{P'}{P} = \sum \frac{m_i}{X - a_i}$; $\sum \frac{1}{2 - x_i} = \frac{11}{7}$; $\sum_k \frac{1}{2 - \omega^k} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n - 1}$.

Correction de l'exercice 3 - Pôle triple en 0

a) $\deg 1 < 4$: pas de partie entière.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X-1}$$

b) $d = [(X-1)F]_{X=1} = \frac{1}{1^3} = 1$.

c) $X^3 F = \frac{1}{X-1} = -(1 + X + X^2 + X^3 + \dots)$ pour $|X| < 1$. En divisant par X^3 :

— $F = -\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} - 1 - X - \dots$; la **partie polaire** en 0 (les puissances négatives) donne $c = -1$, $b = -1$, $a = -1$.

— (Il suffit de pousser le développement de $X^3 F$ jusqu'à l'ordre $m - 1 = 2$: c'est une division suivant les puissances croissantes.)

$$\frac{1}{X^3(X-1)} = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X-1}$$

d) $\chi F(\chi) \rightarrow 0$ en $+\infty$, et $a + d = -1 + 1 = 0$ ✓

— En $X = 2$: $F(2) = \frac{1}{8}$; décomposition : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{1}{8}$ ✓

Réponse. $\frac{1}{X^3(X-1)} = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X-1}$.

Correction de l'exercice 4 - Changement de variable pour un pôle multiple

a) $X = Y + 1$, donc $X^2 = Y^2 + 2Y + 1$ et

$$F = \frac{Y^2 + 2Y + 1}{Y^3} = \frac{1}{Y} + \frac{2}{Y^2} + \frac{1}{Y^3} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}$$

b) $\deg(X^3 + 1) = 3 = \deg Q$: la partie entière est une **constante**, 1 (quotient des coefficients dominants). Avec $X = Y + 1$: $X^3 + 1 = Y^3 + 3Y^2 + 3Y + 2$.

— $G = 1 + \frac{3}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3}$.

— **Contrôle** en $X = 0$: $G(0) = \frac{1}{-1} = -1$ et $1 - 3 + 3 - 2 = -1$ ✓

c) On primitive terme à terme ($x > 1$) :

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

d) En 3 : $\ln 2 - 1 - \frac{1}{8}$; en 2 : $0 - 2 - \frac{1}{2}$.

— Intégrale = $\ln 2 - \frac{9}{8} + \frac{5}{2} = \ln 2 + \frac{11}{8} \approx 2,068$.

— **Vraisemblance** : sur $[2; 3]$, l'intégrande décroît de 4 à $\frac{9}{8}$; une valeur entre 1,1 et 4 est cohérente.

Réponse. $F = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}$; $G = 1 + \frac{3}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3}$; $\int_2^3 = \ln 2 + \frac{11}{8}$.

Correction de l'exercice 5 - Facteur irréductible au carré

a) $F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$, et $a = [XF]_{X=0} = 1$.

b) F est **impaire** ($F(-X) = -F(X)$). Par unicité de la décomposition, celle de $-F(-X)$ est la même : cela impose $c = 0$ et $e = 0$ (les termes $\frac{c}{X^2+1}$ et $\frac{e}{(X^2+1)^2}$ sont pairs).

— $xF(x) \rightarrow 0$ et $x\left(\frac{1}{x} + \frac{bx}{x^2+1} + \dots\right) \rightarrow 1 + b$: donc $b = -1$.

— On multiplie par $X^2 + 1$ au carré et on évalue en $X = i$: $\left[(X^2 + 1)^2 F\right]_{X=i} = \frac{1}{i} = -i = di$, donc $d = -1$.

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$$

c) $F(1) = \frac{1}{4}$; décomposition : $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ✓

d) On reconnaît des dérivées usuelles : $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ et $\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

— Primitive : $\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$.

Réponse. $F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$; primitive $\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)}$.

Correction de l'exercice 6 - Intégrale de $1/(x^3 + 1)$

a) $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$, et $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle ($\Delta = -3$). Coefficient en -1 : $\frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ (formule $\frac{P(a)}{Q'(a)}$). Puis

$$\frac{1}{X^3 + 1} - \frac{1}{3(X + 1)} = \frac{3 - (X^2 - X + 1)}{3(X^3 + 1)} = \frac{-(X + 1)(X - 2)}{3(X + 1)(X^2 - X + 1)}$$

— D'où $\frac{1}{X^3 + 1} = \frac{1}{3(X + 1)} + \frac{-X + 2}{3(X^2 - X + 1)}$.

b) $X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Et $-X + 2 = -\frac{1}{2}(2X - 1) + \frac{3}{2}$.

c) On intègre chaque morceau :

$$- \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = \ln(x^2 - x + 1) ; \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \ln(x + 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

d) Entre 0 et 1 : $\frac{1}{3} \ln 2 - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{3}$.

$$- \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,8356 \checkmark \text{ (confirmé par intégration numérique).}$$

Réponse. $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{-x + 2}{3(x^2 - x + 1)}$; $\int_0^1 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,836$.

Correction de l'exercice 7 - Somme de $1/(k^2 - 1)$

a) Pôles simples ± 1 : $\frac{1}{X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1} \right)$.

b) $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$: télescopage à **deux crans**. Écrivons les termes :

$$- \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

— Il reste les deux premiers positifs et les deux derniers négatifs :

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

c) $S_n \rightarrow \frac{3}{4}$.

d) $n = 2$: $S_2 = \frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$; $n = 3$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ et $\frac{3}{4} - \frac{7}{24} = \frac{11}{24} \checkmark$

— $n = 10$: $\frac{3}{4} - \frac{21}{220} \approx 0,6545$, identique à la somme directe $\checkmark$

Réponse. $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} \rightarrow \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 8 - Télescopage déguisé

a) $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \checkmark$

b) Télescopage :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

— **Contrôle** $n = 10 : 1 - \frac{1}{121} \approx 0,9917$, égal à la somme directe ✓

c) Pôles doubles 0 et -1 . Coefficients des termes de plus haut ordre : $[X^2 F]_0 = \frac{1}{1} = 1$ et $[(X+1)^2 F]_{-1} = \frac{-1}{1} = -1$.

— Par a), $F = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{(X+1)^2}$: les coefficients des termes simples $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{X+1}$ sont **nuls**.

Cohérent avec la limite de $x F(x)$, nulle.

d) Vérification de l'identité : la différence vaut

$$\frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}, \text{ d'où le facteur } \frac{1}{3}.$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \rightarrow \frac{1}{18}$$

— **Méthode** : on cherche à écrire le terme comme **différence de deux termes consécutifs** d'une même suite.

Réponse. $\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 1$; $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \rightarrow \frac{1}{18}$.

Correction de l'exercice 9 - Dérivées successives de $1/(x^2 - 1)$

a) $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$.

b) $n = 0$ ✓. Si la formule vaut au rang n , on dérive $(x-a)^{-(n+1)} : -(n+1)(x-a)^{-(n+2)}$, d'où

$$\left(\frac{1}{x-a} \right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n n! \times (-(n+1))}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

c) Par linéarité :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$$

— Sans la décomposition, dériver n fois un quotient serait très lourd.

d) $f^{(3)}(2) = \frac{-6}{2} \left(1 - \frac{1}{81} \right) = -3 \times \frac{80}{81} = -\frac{80}{27} \approx -2,963$.

— **Contrôle** : $f(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, et la formule c) avec $n = 1$ donne

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \times \frac{4x}{(x^2-1)^2} \quad \checkmark$$

Réponse. $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$; $f^{(3)}(2) = -\frac{80}{27}$.

Correction de l'exercice 10 - Décomposition par la parité

a) $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1) : F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$.

b) $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ avec $Q' = 4X^3 : a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4(-1)} = -\frac{1}{4}$.

c) F est **paire** ; les termes $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right)$ forment une fonction paire, donc $\frac{\alpha X + \beta}{X^2 + 1}$ aussi : $\alpha = 0$.

— En $X = 0$: $F(0) = -1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \beta$, donc $\beta = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right) - \frac{1}{2(X^2 + 1)}$$

— **Contrôle** en $X = 2$: $\frac{1}{15}$ et $\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{10} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ✓

d) Primitive : $\frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \arctan x$.

— Entre 2 et 3 : $\frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} (\arctan 3 - \arctan 2) = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{7}$ (car $\arctan 3 - \arctan 2 = \arctan \frac{3-2}{1+6}$).

— Valeur : $\approx 0,10137 - 0,07095 = 0,0304$.

Réponse. $\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} \right) - \frac{1}{2(X^2 + 1)}$; $\int_2^3 = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{7} \approx 0,030$.

Correction de l'exercice 11 - $22/7$ est plus grand que π

a) L'intégrande est continue, positive, et non identiquement nulle sur $[0; 1]$: $I > 0$.

b) $X^4(1-X)^4 = X^8 - 4X^7 + 6X^6 - 4X^5 + X^4$. La division par $X^2 + 1$ donne (vérifié par calcul exact) :

$$X^4(1-X)^4 = (X^2 + 1)(X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4) - 4$$

c) Donc $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$. On intègre sur $[0; 1]$:

— $\frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 = \frac{22}{7}$ (calcul exact en fractions), et $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} = 4 \arctan 1 = \pi$.

— $I = \frac{22}{7} - \pi$. Avec a) : $\pi < \frac{22}{7}$, l'approximation d'Archimède est un **majorant**.

d) Sur $[0; 1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. En multipliant par $x^4(1-x)^4 \geq 0$ et en intégrant :

$$\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}$$

— D'où $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$, soit $3,141\,27 \leq \pi \leq 3,142\,06$.

— **Contrôle** : $I \approx 0,001\,264$ (numérique), bien entre $0,000\,79$ et $0,001\,59$ ✓

Réponse. $I = \frac{22}{7} - \pi > 0$; $3,14127 \leq \pi \leq 3,14206$.

Correction de l'exercice 12 - Pôles complexes conjugués

a) $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$ avec $j - j^2 = i\sqrt{3}$. Coefficient en j : $\frac{1}{j-j^2} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$; en j^2 :

$$\frac{1}{j^2 - j} = -\frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

$$\frac{1}{X^2 + X + 1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2} \right)$$

$$\text{b) } \frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2} = \frac{j-j^2}{(X-j)(X-j^2)} = \frac{i\sqrt{3}}{X^2+X+1} \checkmark$$

c) F est à coefficients réels : $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$. La décomposition de F et celle obtenue en conjuguant tous ses coefficients sont deux décompositions de F ; par **unicité**, le coefficient en $\bar{a}$ est $\bar{\lambda}$.

$$- \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\bar{\lambda}}{X-\bar{a}} = \frac{\lambda(X-\bar{a}) + \bar{\lambda}(X-a)}{X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(\lambda)X - 2\operatorname{Re}(\lambda\bar{a})}{X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2}, \text{ réel.}$$

d) Pôles $\pm 2i$: coefficient en $2i$: $\frac{2i}{4i} = \frac{1}{2}$, en $-2i$: $\frac{1}{2}$ (conjugué).

— Sur $\mathbb{C}$: $\frac{X}{X^2+4} = \frac{1}{2(X-2i)} + \frac{1}{2(X+2i)}$. Sur $\mathbb{R}$: la fraction **est déjà** un élément simple de seconde espèce.

Réponse. $\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2} \right)$; coefficients conjugués aux pôles conjugués.

Correction de l'exercice 13 - Somme de $k/(k^4 + k^2 + 1)$

a) $(k^2+1)^2 - k^2 = k^4 + 2k^2 + 1 - k^2 = k^4 + k^2 + 1 \checkmark$ (différence de deux carrés).

$$\text{b) } \frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{(k^2+k+1) - (k^2-k+1)}{k^4+k^2+1} = \frac{2k}{k^4+k^2+1} \checkmark$$

c) Avec $u_k = \frac{1}{k^2-k+1}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{k^2+k+1}$: le terme vaut $\frac{1}{2}(u_k - u_{k+1})$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}(u_1 - u_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2+n+1} \right)$$

d) Limite $\frac{1}{2}$.

— $n=1$: $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \checkmark$; $n=5$: $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{15}{31} \approx 0,4839$, égal à la somme directe $\checkmark$

Réponse. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2+n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Coefficients par la limite à l'infini

a) $\deg(X^2+1) = 2 < 3$: pas de partie entière, forme annoncée.

$$\text{b) } b = \left[(X-1)^2 F \right]_{X=1} = \frac{2}{3} ; c = \left[(X+2) F \right]_{X=-2} = \frac{5}{9}.$$

c) $x F(x) \rightarrow 1$ (quotient des termes dominants $\frac{x^3}{x^3}$), et $x \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} \right) \rightarrow a+c$.

$$a+c=1 \implies a=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

— **Contrôle** en $X=0$: $F(0) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$; décomposition :
 $-\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5}{18} = \frac{-8+12+5}{18} = \frac{1}{2} \checkmark$

d) $\int F = \frac{4}{9} \ln(x-1) - \frac{2}{3(x-1)} + \frac{5}{9} \ln(x+2) + C$ sur $]1; +\infty[$.

— **Méthode** : la limite de $x F(x)$ donne la **somme** des coefficients des termes de degré -1 ; c'est l'équation manquante quand on ne peut pas évaluer.

Réponse. $F = \frac{4/9}{X-1} + \frac{2/3}{(X-1)^2} + \frac{5/9}{X+2}.$

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une série et une intégrale

a) Primitive : $\frac{1}{2} \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) = \frac{1}{2} \ln \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$

$$\int_1^A F = \frac{1}{2} \ln \frac{A(A+2)}{(A+1)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}$$

— $\frac{A(A+2)}{(A+1)^2} \rightarrow 1$, donc la limite est $-\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \approx 0,1438.$

b) F est **décroissante** et positive sur $[1; +\infty[$. Pour $k \geq 1$: $\int_k^{k+1} F \leq F(k)$ et, pour $k \geq 2$, $F(k) \leq \int_{k-1}^k F$. On somme :

— $\int_1^{+\infty} F \leq \sum_{k \geq 1} F(k) \leq F(1) + \int_1^{+\infty} F.$

c) $0,1438 \leq 0,25 \leq \frac{1}{6} + 0,1438 = 0,3105 \checkmark$

d) Chaque terme $\frac{c}{x-a}$ a une primitive en $c \ln|x-a|$, divergente à l'infini. La somme ne converge que si les $\ln$ se compensent : $\sum c \ln x \rightarrow$ limite finie exige $\sum c = 0$. C'est équivalent à $x F(x) \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Réponse. $\int_1^{+\infty} F = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \approx 0,144$; $0,144 \leq \sum F(k) = \frac{1}{4} \leq 0,311.$