

Plaquette 5 - Polynômes au service de l'analyse : synthèse

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule de Taylor pour P de degré $\leq n$ et $a \in K$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

— **Taylor-Lagrange** (fonction f de classe C^{n+1}) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1} |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } M_{n+1} = \sup |f^{(n+1)}|.$$

— **Erreur d'interpolation** aux nœuds $x_0, \dots, x_n$: $|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_i |x - x_i|$.

— **Différence finie** $\Delta P = P(X+1) - P(X)$: si $\deg P = d \geq 1$ de coefficient dominant a , ΔP est de degré $d-1$ et de coefficient dominant da ; $\Delta^d P = d! a$.

— **Newton** : $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$.

— **Cayley-Hamilton** (2×2) : $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b) \right) \text{ si } \deg P \leq 3 \text{ (Simpson)}$$

Correction de l'exercice 1 - Formule de Taylor pour un polynôme

a) $P(1) = 1, P'(1) = 3, P''(1) = 6, P'''(1) = 6$. La formule de Taylor donne

$$X^3 = 1 + 3(X-1) + \frac{6}{2}(X-1)^2 + \frac{6}{6}(X-1)^3 = 1 + 3(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$$

b) $X^3 = (1 + (X-1))^3 = 1 + 3(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3 \checkmark$ (binôme).

c) Par Taylor, $Q = \sum_k \frac{Q^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$. $(X-1)^m$ divise Q exactement lorsque les coefficients d'indice $k < m$ sont nuls et celui d'indice m ne l'est pas, c'est-à-dire $Q^{(k)}(1) = 0$ pour $k < m$ et $Q^{(m)}(1) \neq 0$.

d) $Q(1) = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$; $Q' = 4X^3 - 12X^2 + 12X - 4, Q'(1) = 0$;
 $Q'' = 12X^2 - 24X + 12, Q''(1) = 0$; $Q''' = 24X - 24, Q'''(1) = 0$; $Q^{(4)} = 24$.

— $Q = \frac{24}{4!} (X-1)^4 = (X-1)^4$: 1 est racine d'ordre 4.

— On reconnaît d'ailleurs les coefficients binomiaux 1, -4, 6, -4, 1.

Réponse. $X^3 = 1 + 3(X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$; $Q = (X-1)^4$.

Correction de l'exercice 2 - Somme des carrés par un polynôme

a) Si $\deg P = d \geq 1$ de coefficient dominant α , $P(X+1) - P(X)$ est de degré $d-1$ (coefficient $d\alpha$). Il faut $d-1 = 2$: $d = 3$.

b) $P(X+1) - P(X) = a(3X^2 + 3X + 1) + b(2X + 1) + c$. Identification avec X^2 :

$$3a = 1, \quad 3a + 2b = 0, \quad a + b + c = 0$$

$$- a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} : P = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

c) On somme $P(k+1) - P(k) = k^2$ pour $k = 0$ à $n-1$: télescopage,
 $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = P(n) - P(0) = P(n).$

$$- \text{Pour la somme jusqu'à } n : \sum_{k=1}^n k^2 = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\mathbf{d)} \ n = 10 : \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \text{ et } 1 + 4 + \dots + 100 = 385 \checkmark$$

— $6 \mid n(n+1)(2n+1)$: le produit contient deux entiers consécutifs (donc un pair), et modulo 3, si $n \equiv 0$ ou $n \equiv 2$ alors $3 \mid n$ ou $3 \mid n+1$; si $n \equiv 1$, $2n+1 \equiv 0$. Cohérent avec le fait que la somme est entière.

$$\mathbf{Réponse.} \ P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6} ; \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (385 pour } n = 10).$$

Correction de l'exercice 3 - Solutions polynomiales d'équations différentielles

a) $\deg P'' < \deg P$ (ou $P'' = 0$) : $\deg(P'' + P) = \deg P$, donc $\deg P = 3$. Avec $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $P'' = 6aX + 2b$:

$$aX^3 + bX^2 + (c + 6a)X + (d + 2b) = X^3$$

$$- a = 1, b = 0, c = -6, d = 0 : P = X^3 - 6X. \text{ Contrôle : } P'' = 6X, \text{ et } 6X + X^3 - 6X = X^3 \checkmark$$

b) Même raisonnement, $\deg P = 2$: $P = X^2 + \alpha X + \beta$, $P - P' = X^2 + (\alpha - 2)X + (\beta - \alpha)$. Donc $\alpha = 2$, $\beta = 2$: $P = X^2 + 2X + 2$.

c) $Q^{(k)} = 0$ pour $k > \deg Q$: la somme est finie. $P - P' = (Q + Q' + \dots) - (Q' + Q'' + \dots) = Q \checkmark$

— **Unicité** : si P_1, P_2 conviennent, $D = P_1 - P_2$ vérifie $D = D'$; si $D \neq 0$, $\deg D' < \deg D$, contradiction. Donc $D = 0$.

— Avec $Q = X^2$: $X^2 + 2X + 2 \checkmark$ (b).

d) Solution particulière polynomiale + solutions de l'équation homogène (linéarité) :

$$y(x) = x^3 - 6x + A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

— **Méthode** : pour un second membre polynomial, on cherche une solution **polynomiale de même degré** (quand le coefficient de y est non nul).

$$\mathbf{Réponse.} \ y'' + y = X^3 : P = X^3 - 6X ; P - P' = X^2 : P = X^2 + 2X + 2 ; \\ y = x^3 - 6x + A \cos x + B \sin x.$$

Correction de l'exercice 4 - Erreur d'interpolation pour le sinus

a) P s'annule en 0 et π : $P = cX(\pi - X)$, et $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\frac{\pi^2}{4} = 1$.

$$P(x) = \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$$

b) $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$, alors que $\sin \frac{\pi}{4} \approx 0,7071$: erreur $\approx 0,0429$.

c) $\left| \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} - \pi \right) \right| = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi^3}{64} \approx 1,453$.

— Majorant : $\frac{1}{6} \times 1,453 \approx 0,242$. L'erreur réelle (0,043) est bien inférieure $\checkmark$, mais la borne est **pessimiste** (facteur ≈ 6), car $|\sin'''|$ n'atteint pas partout sa borne 1.

d) Les deux courbes coïncident en 0, $\frac{\pi}{2}$, π ; l'écart est maximal à l'intérieur de chaque

demi-intervalle, vers $x \approx 0,9$ et $x \approx 2,2$, où il vaut environ 0,056 (calcul numérique sur une grille fine).

— **Portée** : l'erreur d'interpolation dépend de la **régularité** de f (via M_{n+1}) et de la **position des nœuds** (via le produit).

Réponse. $P = \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$; erreur en $\frac{\pi}{4}$: 0,043, majorant 0,242 ; écart maximal $\approx 0,056$.

Correction de l'exercice 5 - Méthode de Newton pour la racine cubique de 2

a) $P' = 3X^2$, donc $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2}{3x_k^2} = \frac{3x_k^3 - x_k^3 + 2}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + 2}{3x_k^2}$.

b) $x_1 = \frac{4}{3} \approx 1,333\,33$; $x_2 = \frac{2 \times \frac{64}{27} + 2}{3 \times \frac{16}{9}} = \frac{182/27}{16/3} = \frac{91}{72} \approx 1,263\,89$; $x_3 \approx 1,259\,933$.

— Valeur exacte : $\sqrt[3]{2} \approx 1,259\,921\,05$.

c) On calcule $x_{k+1} - \alpha$ avec $\alpha^3 = 2$:

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{2x_k^3 + 2 - 3\alpha x_k^2}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 - 3\alpha x_k^2 + \alpha^3}{3x_k^2} = \frac{(x_k - \alpha)^2(2x_k + \alpha)}{3x_k^2}$$

— (Factorisation : α est racine double de $2t^3 - 3\alpha t^2 + \alpha^3$, et le quotient est $2t + \alpha$.)

— Près de α , $\frac{2x_k + \alpha}{3x_k^2} \approx \frac{1}{\alpha} \approx 0,79$: $|x_{k+1} - \alpha| \approx 0,79 |x_k - \alpha|^2$. **Convergence quadratique.**

d) Erreurs : $x_2 : 4 \times 10^{-3}$; $x_3 : 1,2 \times 10^{-5}$; $x_4 : \approx 1,2 \times 10^{-10}$ (calcul : $x_4 = 1,259\,921\,050\,0$). Environ 9 **décimales exactes** : le nombre de décimales double à chaque étape.

Réponse. $x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 2}{3x_k^2}$; $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{91}{72}$; erreur quadratique ; x_4 a environ 9 décimales exactes.

Correction de l'exercice 6 - Polynômes orthogonaux

a) $\int_{-1}^1 t^k dt = 0$ si k impair, $\frac{2}{k+1}$ si k pair :

— $\langle 1, 1 \rangle = 2$, $\langle 1, X \rangle = 0$, $\langle X, X \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle 1, X^2 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle X, X^2 \rangle = 0$.

b) $Q_0 = 1$; $Q_1 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = X$.

$$Q_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 - \frac{\langle X^2, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X = X^2 - \frac{2/3}{2} = X^2 - \frac{1}{3}$$

— **Contrôle** : $\langle Q_2, 1 \rangle = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ ✓

c) $L_2 = 12X^2 - 4 = 12\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = 12Q_2$: **proportionnels**. Les polynômes de Legendre sont orthogonaux pour ce produit scalaire, et leurs racines ($\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$) sont celles de Q_2 .

d) La projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $\sum_i \frac{\langle X^3, Q_i \rangle}{\langle Q_i, Q_i \rangle} Q_i$. Par parité, seul $Q_1 = X$ contribue :

— $\langle X^3, X \rangle = \frac{2}{5}$ et $\langle X, X \rangle = \frac{2}{3}$: $R = \frac{2/5}{2/3} X = \frac{3}{5} X$.

— **Vérification** : $X^3 - \frac{3}{5}X$ est orthogonal à 1 (impair), à X^2 (impair) et à X ($\frac{2}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = 0$)
✓

Réponse. $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, $Q_2 = X^2 - \frac{1}{3} = \frac{L_2}{12}$; meilleure approximation de X^3 : $\frac{3}{5}X$.

Correction de l'exercice 7 - Méthode de Simpson exacte en degré 3

a) Sur $[-1; 1]$: $S(P) = \frac{1}{3}(P(-1) + 4P(0) + P(1))$.

— $P = 1$: $\frac{1+4+1}{3} = 2 = \int_{-1}^1 1 \text{ ✓}$; $P = X$: $\frac{-1+0+1}{3} = 0 \text{ ✓}$;

— $P = X^2$: $\frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3} \text{ ✓}$; $P = X^3$: 0 ✓ (impair) .

b) S et l'intégrale sont **linéaires** en P : l'égalité sur la base $(1, X, X^2, X^3)$ s'étend à $\mathbb{R}_3[X]$.

Pour $[a; b]$, on pose $t = m + \frac{b-a}{2}u$; $P(t)$ reste un polynôme de degré ≤ 3 en u , et

$dt = \frac{b-a}{2}du$ transforme la formule sur $[-1; 1]$ en celle sur $[a; b]$.

c) Simpson : $\frac{2}{6}(P(0) + 4P(1) + P(2)) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 5) = 2$.

— Directement : $\left[\frac{t^4}{4} - t^2 + t \right]_0^2 = 4 - 4 + 2 = 2 \text{ ✓}$

d) t^4 sur $[0; 2]$: Simpson donne $\frac{1}{3}(0 + 4 + 16) = \frac{20}{3} \approx 6,667$; l'intégrale vaut $\frac{32}{5} = 6,4$.

$$\text{erreur} = \frac{20}{3} - \frac{32}{5} = \frac{100 - 96}{15} = \frac{4}{15}$$

— **Remarque** : Simpson n'utilise que trois points mais est exacte en degré 3 : un degré de plus que ce qu'on attend de trois points (grâce à la symétrie).

Réponse. Simpson exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$; $\int_0^2 (t^3 - 2t + 1) = 2$; erreur $\frac{4}{15}$ pour t^4 sur $[0; 2]$.

Correction de l'exercice 8 - Différences finies

a) $(X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \dots$ (binôme), et pour les termes de degré $< d$, la différence est de degré $< d-1$. Donc $\Delta P = d a X^{d-1} + \dots$

b) Par récurrence : $\Delta^k P$ est de degré $d-k$, de coefficient dominant $d(d-1)\cdots(d-k+1)a$. Pour $k=d$: constante $d!a$; puis $\Delta^{d+1}P = 0$.

c) k^3 : 0, 1, 8, 27, 64, 125.

Suite	Valeurs
k^3	0, 1, 8, 27, 64, 125
Δ	1, 7, 19, 37, 61
Δ^2	6, 12, 18, 24
Δ^3	6, 6, 6

— $\Delta^3 = 6 = 3! \times 1 \text{ ✓}$

d) Δu : 3, 7 ; $\Delta^2 u = 4$ (constant pour un degré 2). On prolonge : Δu : 3, 7, 11, 15 ;
 $u_3 = 11 + 11 = 22$, $u_4 = 22 + 15 = 37$.

— Polynôme : $\Delta^2 = 2!a = 4$, donc $a = 2$; $u_k = 2k^2 + bk + 1$ avec $u_1 = 3 + b = 4$, $b = 1$:
 $u_k = 2k^2 + k + 1$.

— **Contrôle** : $u_3 = 18 + 3 + 1 = 22 \checkmark$, $u_4 = 32 + 4 + 1 = 37 \checkmark$

Réponse. $\Delta^d P = d! a$; $\Delta^3(k^3) = 6$; $u_k = 2k^2 + k + 1$, $u_3 = 22$, $u_4 = 37$.

Correction de l'exercice 9 - Degré impair et racine réelle

a) $P = aX^n + \dots$ avec n impair : $P(x) \sim ax^n$ en $\pm\infty$, et x^n tend vers $+\infty$ et $-\infty$ aux deux bouts. P prend des valeurs de signes contraires ; étant **continu**, il s'annule (TVI).

b) $X^2 + 1$ (ou tout $X^{2k} + 1$).

c) Dans $\mathbb{C}$, P a n racines comptées avec multiplicité ; les non réelles vont par paires $z, \bar{z}$ de même multiplicité : leur nombre total est **pair**. Comme n est impair, il reste au moins une racine réelle.

d) $f(x) = x^5 - 3x + 1$: $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$: une racine dans $]0; 1[$ (TVI).

— $f(-2) = -32 + 6 + 1 = -25 < 0$ et $f(0) > 0$: une racine dans $] - 2; 0[$; $f(1) < 0$ et $f(2) = 32 - 6 + 1 = 27 > 0$: une racine dans $]1; 2[$.

— Trois intervalles disjoints : **au moins trois** racines réelles.

— Au plus trois : $f' = 5x^4 - 3$ a deux racines réelles, donc f au plus trois (Rolle).

Exactement trois.

Réponse. Degré impair $\Rightarrow$ racine réelle ; $x^5 - 3x + 1$ a exactement 3 racines réelles, dans $] - 2; 0[$, $]0; 1[$, $]1; 2[$.

Correction de l'exercice 10 - Suites récurrentes linéaires

a) $r^{n+2} = r^{n+1} + 2r^n$ pour tout n équivaut (si $r \neq 0$) à $r^2 = r + 2$:

$$X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$$

— Racines 2 et -1.

b) $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha - \beta = 1$: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$.

$$u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

c) Récurrence : 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171. Formule : $n = 5$: $\frac{32+1}{3} = 11 \checkmark$; $n = 9$: $\frac{512+1}{3} = 171 \checkmark$

d) M vérifie $M^2 - M - 2I = 0$ (Cayley-Hamilton : trace 1, déterminant -2). Le reste de X^n modulo $(X - 2)(X + 1)$ est $aX + b$ avec $2a + b = 2^n$ et $-a + b = (-1)^n$:

— $a = \frac{2^n - (-1)^n}{3} = u_n$ et $b = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$. Donc $M^n = u_n M + bI$.

— La deuxième composante de $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vaut $u_n \times 1 + b \times 0 = u_n \checkmark$

— **Lien** : le polynôme caractéristique de la récurrence est celui de la matrice M .

Réponse. $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$; $u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Correction de l'exercice 11 - Cayley-Hamilton en dimension 2

a) $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$ et $(a + d)M = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$.

— Différence : $\begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -(ad - bc)I_2$. D'où $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0 \checkmark$

b) On écrit $M(\text{tr}(M)I_2 - M) = \det(M)I_2$, donc si $\det M \neq 0$:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— C'est la formule usuelle ✓ ($\text{tr}(M)I_2 - M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$).

c) $\text{tr} = 5$, $\det = 5$: $M^2 = 5M - 5I_2$.

— $M^{-1} = \frac{1}{5}(5I_2 - M) = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$. **Contrôle** : $MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2 - 0,2 & -0,4 + 0,4 \\ 0,6 - 0,6 & -0,2 + 1,2 \end{pmatrix} = I_2$ ✓

— $M^3 = M \cdot M^2 = 5M^2 - 5M = 5(5M - 5I_2) - 5M = 20M - 25I_2$.

d) Pour tout polynôme Q , $Q(M) = R(M)$ où R est le reste de Q modulo

$\chi = X^2 - \text{tr}(M)X + \det M$, puisque $\chi(M) = 0$. Pour la matrice de la plaquette 2,

$\chi = X^2 - 3X + 2$ exactement.

Réponse. $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$; en c) $M^{-1} = \frac{1}{5}(5I_2 - M)$ et $M^3 = 20M - 25I_2$.

Correction de l'exercice 12 - Parité et polynômes

a) $P(-X) = \sum a_k(-1)^k X^k$. Par identification, $P(-X) = P(X) \Leftrightarrow a_k = (-1)^k a_k$ pour tout $k \Leftrightarrow a_k = 0$ pour k impair. Alors $P = \sum a_{2j} X^{2j} = Q(X^2)$ avec $Q = \sum a_{2j} X^j$.

b) $P = (X - a)^m S$ avec $S(a) \neq 0$. Alors

$P(X) = P(-X) = (-X - a)^m S(-X) = (-1)^m (X + a)^m S(-X)$: $(X + a)^m$ divise P . Même raisonnement en échangeant a et $-a$: multiplicités égales.

c) $P = \alpha X^4 + \beta X^2 + \gamma$ avec $\gamma = P(0) = 1$; $P(1) = \alpha + \beta + 1 = 0$; $P(2) = 16\alpha + 4\beta + 1 = -3$.

— $\beta = -1 - \alpha$, puis $16\alpha - 4 - 4\alpha + 1 = -3$, soit $12\alpha = 0$: $\alpha = 0$, $\beta = -1$.

$$P = 1 - X^2$$

— **Contrôle** : $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ (parité, b)), $P(2) = -3$ ✓

d) On pose $Y = X - \frac{1}{2}$ et $R(Y) = P\left(Y + \frac{1}{2}\right)$. La condition $P(1 - X) = P(X)$ devient

$R(-Y) = R(Y)$: R est pair, donc $R = Q(Y^2)$ par a), d'où $P = Q\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$.

— **Interprétation** : la courbe de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.

Réponse. P pair $\Leftrightarrow P = Q(X^2)$; en c) $P = 1 - X^2$; $P(1 - X) = P(X) \Leftrightarrow P = Q\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$.

Correction de l'exercice 13 - Approcher e par Taylor

a) $\exp^{(n+1)} = \exp$, majorée par e sur $[0; 1]$. Taylor-Lagrange entre 0 et 1 :

$$|e - T_n(1)| \leq \frac{e \times 1^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

— De plus $e - T_n(1) = \sum_{k > n} \frac{1}{k!} > 0$ (ou par la formule du reste intégral, positif).

b) $T_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} \approx 2,71806$.

— Majorant : $\frac{3}{5040} \approx 6 \times 10^{-4}$. Erreur réelle : $2,71828 - 2,71806 = 2,3 \times 10^{-4}$ ✓

c) Il faut $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$, soit $(n+1)! > 3 \times 10^6$. $9! = 362880$; $10! = 3628800$:
 $n+1 = 10$, $n = 9$.

d) Si $e = \frac{p}{q}$ ($q \geq 1$), alors $N = q!(e - T_q(1))$ est un **entier** (car $q!e = p(q-1)!$ et $q!T_q(1) = \sum \frac{q!}{k!}$ sont entiers).

— Par a), $0 < N \leq \frac{q!e}{(q+1)!} = \frac{e}{q+1} < 1$ dès que $q \geq 2$ (et pour $q = 1$, e n'est pas entier).

Un entier strictement entre 0 et 1 : contradiction.

— e est **irrationnel**.

Réponse. $0 < e - T_n(1) \leq \frac{3}{(n+1)!}$; $T_6(1) = \frac{1957}{720} \approx 2,71806$; $n = 9$ pour 10^{-6} ; $e \notin \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 14 - Polynômes à valeurs entières

a) $n(n-1)$ est un produit de deux entiers consécutifs, donc pair : $B_2(n) \in \mathbb{Z}$.

b) Pour $n \geq k$: $B_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$; pour $0 \leq n < k$, un facteur est nul.

— Pour $n = -m < 0$:

$$B_k(-m) = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k},$$

entier.

c) $X^2 = X(X-1) + X = 2B_2 + B_1$.

— $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X = 6B_3 + 6B_2 + B_1$.

— **Contrôle** en $X = 3$: $6 + 6 \times 3 + 3 = 27$ ✓

d) $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum (2B_2(k) + B_1(k)) = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$ (formule de sommation

$$\sum_{k \leq n} \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}).$$

— C'est une somme d'entiers, et elle vaut $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$: ce nombre est **entier**.

— **Contrôle** $n = 10$: $2 \times 165 + 55 = 385$ ✓

Réponse. $B_k(n) \in \mathbb{Z}$; $X^2 = 2B_2 + B_1$, $X^3 = 6B_3 + 6B_2 + B_1$; $\sum k^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : polynômes de Bernstein

a) $f = 1$: $\sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$ (binôme).

— $f(x) = x$:

$$\sum_k \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k \geq 1} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_j \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x.$$

— Les polynômes de Bernstein **reproduisent** les fonctions affines.

b) On écrit $k^2 = k(k-1) + k$, avec $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$:

$$\sum_k \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n(n-1)}{n^2} x^2$$

— Et $\sum_k \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n}$ (par a)). Total : $\frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$ ✓

c) $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0; 1]$ (maximum en $\frac{1}{2}$) : $0 \leq B_n(f)(x) - x^2 \leq \frac{1}{4n} \rightarrow 0$.

— $n = 5$, $x = 0,3$: $0,09 + \frac{0,21}{5} = 0,132$, égal à la somme directe ✓ ; écart $0,042 \leq \frac{1}{20}$ ✓

d) $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, donc $B_n(f)(x) = \sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ (théorème de transfert).

— Pour $f(x) = x^2$: $E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = V\left(\frac{S_n}{n}\right) + E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$ ✓ (car $V(S_n) = nx(1-x)$).

— **Portée** : c'est la preuve de Bernstein du **théorème de Weierstrass** : toute fonction continue sur $[0; 1]$ est limite uniforme de polynômes.

Réponse. $B_n(1) = 1$, $B_n(x) = x$, $B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$; écart $\leq \frac{1}{4n}$; $B_n(f)(x) = E[f(S_n/n)]$.