

Plaquette 3 - Racines, multiplicités et factorisation avancée

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Multiplicité. a est racine d'ordre m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

- Les racines **multiples** de P sont exactement les racines de $P \wedge P'$.
- **Rolle** : si $P \in \mathbb{R}[X]$ a k racines réelles distinctes, P' en a au moins $k - 1$, **strictement entre** elles. Une racine d'ordre m de P est d'ordre $m - 1$ de P' .
- $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n **scindé sur** $\mathbb{R} \Rightarrow P'$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Fonctions symétriques des racines $x_1, \dots, x_n$ de $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$:

$$\sigma_1 = -a_{n-1}, \quad \sigma_n = (-1)^n a_0, \quad p_k = \sum_i x_i^k, \quad p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

- **Identité de Newton** : si $x_i^n = -(a_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + a_0)$, on somme sur i pour exprimer p_k en fonction des précédents.
- **Lagrange** : pour $x_0, \dots, x_n$ distincts, $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$; l'unique P de degré $\leq n$ tel que $P(x_i) = y_i$ est $\sum_i y_i L_i$.
- **Polynôme nul** : un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n + 1$ racines est nul ; un polynôme ayant une infinité de racines est nul.

Correction de l'exercice 1 - Imposer une racine double

a) Racine au moins double $\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0$, avec $P' = 5X^4 + a$:

$$1 + a + b = 0, \quad 5 + a = 0$$

— D'où $a = -5$ et $b = 4$: $P = X^5 - 5X + 4$.

b) $P'' = 20X^3$, donc $P''(1) = 20 \neq 0$: 1 est racine **exactement double**.

c) Division par $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ (reste nul, comme prévu) :

$$X^5 - 5X + 4 = (X - 1)^2 (X^3 + 2X^2 + 3X + 4)$$

— **Contrôle** en $X = 0$: $4 = 1 \times 4$ ✓ ; en $X = -1$: $-1 + 5 + 4 = 8$ et $4 \times (-1 + 2 - 3 + 4) = 8$ ✓

d) Soit $Q = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Pour $x \geq 0$, tous les termes sont positifs et $Q(x) \geq 4 > 0$: aucune racine positive.

— $Q' = 3X^2 + 4X + 3$ a pour discriminant $16 - 36 < 0$: $Q' > 0$, Q est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, avec $Q(-2) = -8 + 8 - 6 + 4 = -2 < 0$ et $Q(-1) = 2 > 0$.

— Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, Q a **exactement une** racine réelle, dans $] -2 ; -1[$; les deux autres sont complexes conjuguées.

Réponse. $a = -5$, $b = 4$; $X^5 - 5X + 4 = (X - 1)^2 (X^3 + 2X^2 + 3X + 4)$; une seule autre racine réelle, dans $] -2 ; -1[$.

Correction de l'exercice 2 - Racines multiples par le PGCD avec la dérivée

a) $P' = 4X^3 - 6X^2 + 2$. On divise P par P' :

$$- P = \left(\frac{X}{4} - \frac{1}{8}\right)P' + R_1 \text{ avec } R_1 = -\frac{3}{4}X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(X-1)^2.$$

— Puis $P' = 4X^3 - 6X^2 + 2 = (X-1)^2(4X+2)$: le reste suivant est **nul**.

$$\text{pgcd}(P, P') = (X-1)^2$$

b) Si a est racine d'ordre $m \geq 2$ de P , elle est racine d'ordre $m-1 \geq 1$ de P' : racine commune. Si a est racine simple, $P'(a) \neq 0$. Les racines communes de P et P' sont donc les racines multiples de P , et a est racine d'ordre $m-1$ du PGCD.

c) 1 est racine d'ordre 3 de P (ordre 2 dans le PGCD). On divise par

$$(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 :$$

$$P = (X-1)^3(X+1)$$

— **Contrôle** : $(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(X+1) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$ ✓ (le terme en X^2 s'annule : $3 - 3 = 0$).

d) $P(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$; $P'(1) = 4 - 6 + 2 = 0$; $P'' = 12X^2 - 12X$, $P''(1) = 0$; $P''' = 24X - 12$, $P'''(1) = 12 \neq 0$: ordre **exactement** 3 ✓

— **Méthode** : $\frac{P}{P' \wedge P''} = (X-1)(X+1)$ a les **mêmes racines** que P , mais toutes simples.

Réponse. $\text{pgcd}(P, P') = (X-1)^2$; $P = (X-1)^3(X+1)$.

Correction de l'exercice 3 - Factoriser $X^6 - 1$ et $X^n - 1$

a) Les racines sont les $\omega^k = e^{ik\pi/3}$, $k = 0, \dots, 5$, toutes simples :

$$X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - e^{ik\pi/3})$$

b) Racines réelles : 1 et -1 . Paires conjuguées : $e^{\pm i\pi/3}$ et $e^{\pm 2i\pi/3}$. Avec

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1 :$$

$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

— **Contrôle** : $(X^2 - 1)((X^2 + 1)^2 - X^2) = (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1) = X^6 - 1$ ✓

c) Pour $n = 2m + 1$, la seule racine réelle est 1 (-1 n'est pas racine car $(-1)^n = -1$). Les autres, ω^k pour $1 \leq k \leq 2m$, se regroupent en paires $\{\omega^k, \omega^{n-k} = \overline{\omega^k}\}$ pour $1 \leq k \leq m$, ce qui donne les facteurs $X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1$, irréductibles (discriminant $4\cos^2 - 4 < 0$).

d) $n = 5$, $m = 2$:

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right)$$

— Avec $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$:

$$X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1\right).$$

— **Contrôle** : le produit des deux trinômes vaut $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (coefficient de X^3 : $\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ ✓).

Réponse. $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$;

$$X^5 - 1 = (X - 1) \left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1 \right) \left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1 \right).$$

Correction de l'exercice 4 - Sommes de Newton

a) Avec $X^3 + 0X^2 - X + 1 : \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$.

— $p_1 = \sigma_1 = 0$ et $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 + 2 = 2$.

b) On somme $x_i^3 = x_i - 1$ sur les trois racines :

$$p_3 = p_1 - 3 = -3$$

— En multipliant par x_i : $x_i^4 = x_i^2 - x_i$, d'où $p_4 = p_2 - p_1 = 2$.

c) On multiplie $x_i^3 = x_i - 1$ par x_i^k : $x_i^{k+3} = x_i^{k+1} - x_i^k$, et on somme : $p_{k+3} = p_{k+1} - p_k$ (valable pour $k \geq 0$ avec $p_0 = 3$).

— $p_5 = p_3 - p_2 = -3 - 2 = -5$.

— **Contrôle** : $p_3 = p_1 - p_0 = 0 - 3 = -3$ ✓ (même formule avec $p_0 = 3$). Les valeurs ont été confirmées numériquement.

d) $f(x) = x^3 - x + 1 : f'(x) = 3x^2 - 1$ s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le maximum local vaut

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0 \text{ et le minimum local } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,62 > 0.$$

— La fonction ne change de signe qu'une fois (sur $] -\infty ; -\frac{1}{\sqrt{3}}[$) : **une seule** racine réelle ($\approx -1,32$).

— **Cohérence** : $p_2 = 2 > 0$ ne contredit rien ; mais p_2 réel et positif ne garantit pas des racines réelles.

Réponse. $p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = -3, p_4 = 2, p_5 = -5 ; p_{k+3} = p_{k+1} - p_k$; une seule racine réelle.

Correction de l'exercice 5 - Nombre de racines réelles par Rolle

a) Rolle : si f est continue sur $[\alpha; \beta]$, dérivable sur $] \alpha; \beta[$ et $f(\alpha) = f(\beta)$, alors f s'annule sur $] \alpha; \beta[$.

— Si $r_1 < \dots < r_k$ sont des racines de P , Rolle sur chaque $[r_i; r_{i+1}]$ donne une racine de P' dans $]r_i; r_{i+1}[$: ces $k - 1$ racines sont distinctes (intervalles disjoints).

b) $P' = nX^{n-1} + a$: l'équation $x^{n-1} = -\frac{a}{n}$ a au plus **deux** solutions réelles (au plus une si $n - 1$ est impair, c'est-à-dire n pair).

— Par a), P a au plus $2 + 1 = 3$ racines réelles distinctes, et au plus $1 + 1 = 2$ si n est pair.

c) $P = X^n + X + 1, P' = nX^{n-1} + 1$.

— n **impair** : $n - 1$ pair, $P'(x) \geq 1 > 0$, P strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$: **exactement une** racine réelle.

— n **pair** : P' s'annule en un seul point $x_0 = -n^{-1/(n-1)} \in [-1; 0[$, où P atteint son minimum. Avec $x_0^{n-1} = -\frac{1}{n}$:

$$P(x_0) = x_0 \cdot x_0^{n-1} + x_0 + 1 = x_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1 \geq -\left(1 - \frac{1}{n} \right) + 1 = \frac{1}{n} > 0$$

— Le minimum est strictement positif : **aucune** racine réelle.

d) $n = 4$: la courbe en trait plein reste au-dessus de l'axe (minimum en

$x_0 = -4^{-1/3} \approx -0,63$, valeur $\approx 0,53$) ✓ ; $n = 5$: la courbe pointillée coupe l'axe une fois, vers $x \approx -0,75$ ✓

Réponse. Au plus 3 racines réelles (2 si n pair) ; $X^n + X + 1$: une racine réelle si n impair, aucune si n pair.

Correction de l'exercice 6 - Une équation fonctionnelle polynomiale

a) $P = c : c = c^2$, donc $c \in \{0, 1\}$.

— $P = (X^2 - X)^n : P(X^2) = (X^4 - X^2)^n = X^{2n}(X^2 - 1)^n$ et
 $P(X)P(X+1) = X^n(X-1)^n \cdot (X+1)^n X^n = X^{2n}(X^2 - 1)^n \checkmark$

b) $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0 : \alpha^2$ est racine, puis $\alpha^4, \alpha^8, \dots$. Toutes sont racines.

— $P \neq 0$ a un nombre **fini** de racines : la suite (α^{2^k}) prend un nombre fini de valeurs. Si $|\alpha| \notin \{0, 1\}$, les modules $|\alpha|^{2^k}$ sont deux à deux distincts : contradiction.

c) En $X = \alpha - 1 : P((\alpha - 1)^2) = P(\alpha - 1)P(\alpha) = 0$. Donc $(\alpha - 1)^2$ est racine, et par b) $|(\alpha - 1)^2| \in \{0, 1\}$, d'où $|\alpha - 1| \in \{0, 1\}$.

— Si $\alpha \notin \{0, 1\} : |\alpha| = 1$ et $|\alpha - 1| = 1$, intersection de deux cercles : $\alpha = e^{\pm i\pi/3}$.

— Mais alors $\alpha^2 = e^{\pm 2i\pi/3}$ est racine, et $|\alpha^2 - 1| = \sqrt{3} \notin \{0, 1\}$: contradiction avec c) appliqué à α^2 .

d) Les seules racines possibles sont 0 et 1 : $P = cX^a(X-1)^b$. On reporte :

$$cX^{2a}(X^2 - 1)^b = c^2X^a(X-1)^b(X+1)^aX^b$$

— On compare : $c = c^2$ ($c = 1$), puis les multiplicités de 0 ($2a = a + b$), de 1 ($b = b$) et de -1 ($b = a$) : $a = b$.

— **Solutions** : $P = 0$, $P = 1$ et $P = (X^2 - X)^n$, $n \geq 1$.

Réponse. $P \in \{0, 1\} \cup \{(X^2 - X)^n, n \geq 1\}$.

Correction de l'exercice 7 - Interpolation de Lagrange

a) Par la formule $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$:

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1 = -X(X-2), \quad L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$$

— $L_0(0) = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$, $L_0(1) = L_0(2) = 0$; $L_1(1) = -1 \times (-1) = 1$; $L_2(2) = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \checkmark$

b) $P = 1 \cdot L_0 + 3L_1 + 7L_2$. On développe :

$$\frac{X^2 - 3X + 2}{2} - 3X^2 + 6X + \frac{7X^2 - 7X}{2} = \frac{X^2 - 3X + 2 - 6X^2 + 12X + 7X^2 - 7X}{2} = \frac{2X^2 + 2X + 2}{2}.$$

$$P = X^2 + X + 1$$

— **Contrôle** : $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 7 \checkmark$

c) $Q = L_0 + L_1 + L_2 - 1$ est de degré ≤ 2 et s'annule en 0, 1, 2 (trois racines) : $Q = 0$. De même, $L_1 + 2L_2 - X$ s'annule en 0, 1, 2 : il est nul.

— **Portée** : l'interpolation **reproduit exactement** tout polynôme de degré $\leq n$.

d) Si P et $\tilde{P}$ conviennent, $P - \tilde{P}$ est de degré ≤ 2 avec trois racines distinctes : il est nul.

Réponse. $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_1 = -X(X-2)$, $L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$; $P = X^2 + X + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Valeur suivante d'un interpolant

a) $\deg Q \leq n+1$, et pour $0 \leq k \leq n$: $Q(k) = (k+1)\frac{1}{k+1} - 1 = 0$. Q a les $n+1$ racines distinctes $0, 1, \dots, n$.

b) Un polynôme de degré $\leq n+1$ ayant ces $n+1$ racines s'écrit $Q = c \prod_{k=0}^n (X-k)$. En $X = -1$: $Q(-1) = 0 \times P(-1) - 1 = -1$ et

$$\prod_{k=0}^n (-1-k) = (-1)^{n+1} (n+1)!$$

— Donc $c = \frac{-1}{(-1)^{n+1} (n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

c) En $X = n+1$: $\prod_{k=0}^n (n+1-k) = (n+1)!$, donc $Q(n+1) = (-1)^n$.

— $(n+2)P(n+1) - 1 = (-1)^n$, d'où $P(n+1) = \frac{1 + (-1)^n}{n+2}$.

d) $n = 1$: P affine avec $P(0) = 1$, $P(1) = \frac{1}{2}$, soit $P = 1 - \frac{X}{2}$, et $P(2) = 0$; formule : $\frac{1-1}{3} = 0$ ✓

— $n = 2$: $P(0) = 1$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{3}$. Lagrange (exercice précédent) :

$$P = L_0 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{3}L_2 = \frac{(X-1)(X-2)}{2} - \frac{X(X-2)}{2} + \frac{X(X-1)}{6}.$$

— $P(3) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; formule : $\frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓

— **Leçon** : l'interpolant ne « prolonge » pas la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ ($\frac{1}{4}$ en 3) ; il oscille.

Réponse. $Q = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} X(X-1)\cdots(X-n)$; $P(n+1) = \frac{1 + (-1)^n}{n+2}$.

Correction de l'exercice 9 - Polynôme positif et somme de deux carrés

a) $X^4 + 1 = (X^2 - 1)^2 + 2X^2 = (X^2 - 1)^2 + (\sqrt{2}X)^2$ ✓ (développer : $X^4 - 2X^2 + 1 + 2X^2$).

— $X^2 + 2X + 5 = (X+1)^2 + 2^2$ (forme canonique).

b) P est à coefficients réels sans racine réelle : ses racines vont par paires $z_k, \bar{z}_k$ (même multiplicité). Avec $Q = \prod (X - z_k)$ (une racine par paire), $\bar{Q} = \prod (X - \bar{z}_k)$ et $P = Q\bar{Q}$.

c) $Q = A + iB$ avec A, B réels (parties réelle et imaginaire des coefficients) ; alors $\bar{Q} = A - iB$ et

$$P = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$$

— **Conséquence** : un polynôme réel **positif** sur $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés (les racines réelles sont alors de multiplicité paire, on les ajoute en facteur carré).

d) Racines : $i, -i, 2i, -2i$. On prend $Q = (X-i)(X-2i) = X^2 - 3iX - 2$.

— $A = X^2 - 2$, $B = -3X$: $(X^2 + 1)(X^2 + 4) = (X^2 - 2)^2 + 9X^2$.

— **Contrôle** : $X^4 - 4X^2 + 4 + 9X^2 = X^4 + 5X^2 + 4$ ✓ C'est aussi l'identité de **Lagrange** $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Réponse. $X^4 + 1 = (X^2 - 1)^2 + (\sqrt{2}X)^2$; $P = A^2 + B^2$ avec $Q = A + iB$; $(X^2 + 1)(X^2 + 4) = (X^2 - 2)^2 + (3X)^2$.

Correction de l'exercice 10 - Polynôme des carrés des racines

a) $X^3 + 0X^2 - 2X + 3 : \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2, \sigma_3 = -3.$

b) $\sum y_i = \sum x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4.$

— $\sigma_2^2 = \left(\sum_{i < j} x_i x_j\right)^2 = \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2 + 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3),$ donc
 $\sum_{i < j} y_i y_j = \sigma_2^2 - 2\sigma_3 \sigma_1 = 4 - 0 = 4.$

— $y_1 y_2 y_3 = \sigma_3^2 = 9.$

c) $R = X^3 - (\sum y_i)X^2 + (\sum y_i y_j)X - y_1 y_2 y_3 :$

$$R = X^3 - 4X^2 + 4X - 9$$

d) $P(X) = \prod (X - x_i)$ et $P(-X) = -\prod (X + x_i),$ donc $P(X)P(-X) = -\prod (X^2 - x_i^2) = -R(X^2).$

— $P(X)P(-X) = (X^3 - 2X + 3)(-X^3 + 2X + 3) = 9 - (X^3 - 2X)^2 = -X^6 + 4X^4 - 4X^2 + 9.$

— Donc $R(X^2) = X^6 - 4X^4 + 4X^2 - 9,$ soit $R = X^3 - 4X^2 + 4X - 9$ ✓ (confirmé aussi numériquement).

Réponse. $R = X^3 - 4X^2 + 4X - 9.$

Correction de l'exercice 11 - Système symétrique

a) $(T - x)(T - y)(T - z) = T^3 - (x + y + z)T^2 + (xy + yz + zx)T - xyz :$

$$(T - x)(T - y)(T - z) = T^3 - 2T^2 - 5T + 6$$

— Réciproquement, les trois racines (avec multiplicité) de ce polynôme vérifient le système.

b) $T = 1$ est racine ($1 - 2 - 5 + 6 = 0$). On factorise :

$$T^3 - 2T^2 - 5T + 6 = (T - 1)(T^2 - T - 6) = (T - 1)(T + 2)(T - 3).$$

— $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$: les $3! = 6$ permutations sont solutions.

c) $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 + 10 = 14 ; 1 + 4 + 9 = 14$ ✓

— $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6} ; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ✓

d) x, y racines de $T^2 - 5T + 7 : \Delta = 25 - 28 = -3, T = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

— Deux couples solutions : $\left(\frac{5 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}\right)$ et l'inverse. Aucun couple **réel** : x et y réels de somme 5 ont un produit au plus $\frac{25}{4} < 7.$

Réponse. $\{x, y, z\} = \{1, -2, 3\}$ (6 triplets) ; $x^2 + y^2 + z^2 = 14, \sum \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$; en d) $\frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

Correction de l'exercice 12 - Interpolation d'Hermite

a) Si P et $\tilde{P}$ conviennent, $D = P - \tilde{P}$ est de degré ≤ 3 avec $D(0) = D'(0) = 0$ et $D(1) = D'(1) = 0$: 0 et 1 sont racines **doubles**, soit quatre racines comptées avec multiplicité. Donc $D = 0$.

b) $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$ imposent $P = aX^3 + bX^2 + X.$ Puis :

$$P(1) = a + b + 1 = 1, \quad P'(1) = 3a + 2b + 1 = 0$$

— $b = -a,$ puis $3a - 2a + 1 = 0,$ soit $a = -1, b = 1 : P = -X^3 + X^2 + X.$

— **Contrôle** : $P(1) = -1 + 1 + 1 = 1$ ✓ ; $P'(1) = -3 + 2 + 1 = 0$ ✓

c) La courbe part de l'origine **tangente** à $y = x$ et arrive en $(1; 1)$ **tangente** à l'horizontale : c'est un raccord C^1 , utilisé pour les rampes, les rails ou les courbes de Bézier en dessin assisté.

d) $P = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$: les conditions donnent $\delta = a$, $\gamma = b$, puis $\alpha + \beta = c - a - b$ et $3\alpha + 2\beta = d - b$.

— Ce système en (α, β) a pour déterminant $2 - 3 = -1 \neq 0$: solution **unique**,
 $\alpha = d - b - 2(c - a - b)$, $\beta = 3(c - a - b) - (d - b)$.

— **Contrôle** avec b) ($a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$) : $\alpha = -1 - 0 = -1$ et $\beta = 0 + 1 = 1$ ✓

Réponse. $P = -X^3 + X^2 + X$; en général $\alpha = d - b - 2(c - a - b)$, $\beta = 3(c - a - b) - (d - b)$.

Correction de l'exercice 13 - Relations coefficients-racines et paramètre

a) $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ donne $x_3 = -3x_1$.

b) $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2x_1^2 - 3x_1^2 - 6x_1^2 = -7x_1^2 = -7$, donc $x_1 = \pm 1$.

$$\lambda = -\sigma_3 = -x_1x_2x_3 = -x_1 \cdot 2x_1 \cdot (-3x_1) = 6x_1^3$$

— $x_1 = 1$: racines 1, 2, -3 et $\lambda = 6$. $x_1 = -1$: racines -1, -2, 3 et $\lambda = -6$.

c) $\lambda = 6$: $(X - 1)(X - 2)(X + 3) = (X^2 - 3X + 2)(X + 3) = X^3 - 7X + 6$ ✓

— $\lambda = -6$: $(X + 1)(X + 2)(X - 3) = X^3 - 7X - 6$ ✓

d) Racine double α : $P'(\alpha) = 3\alpha^2 - 7 = 0$, $\alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$, et

$$P(\alpha) = \alpha^3 - 7\alpha + \lambda = \alpha\left(\frac{7}{3} - 7\right) + \lambda = -\frac{14}{3}\alpha + \lambda = 0.$$

$$\lambda = \frac{14}{3}\alpha = \pm\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 7,13.$$

— **Contrôle** : $4p^3 + 27q^2 = 4(-343) + 27\lambda^2 = 0$ donne $\lambda^2 = \frac{1372}{27}$, et

$$\left(\frac{14}{3}\right)^2 \frac{7}{3} = \frac{196 \times 7}{27} = \frac{1372}{27} \quad \checkmark$$

Réponse. $\lambda = \pm 6$ (racines 1, 2, -3 ou leurs opposées) ; racine double pour $\lambda = \pm\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Correction de l'exercice 14 - Polynômes et limites de degré

a) $P - X^2$ a une infinité de racines (les entiers en question) : c'est le polynôme nul.

b) $Q = P - P(0)$ vérifie $Q(n) = Q(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence). Infinité de racines : $Q = 0$, P constant.

c) Si $P = \sum a_k X^k$, la condition s'écrit $\sum a_k 2^k X^k = \sum 4a_k X^k$, soit $a_k(2^k - 4) = 0$ pour tout k .

$$2^k = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

— Donc $a_k = 0$ pour $k \neq 2$: $P = aX^2$, $a \neq 0$.

d) X^2 convient : $(X + 1)^2 - X^2 = 2X + 1$ ✓ Si P convient, $D = P - X^2$ vérifie $D(X + 1) = D(X)$, donc D est constant par b).

— **Solutions** : $P = X^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

— **Méthode** : une solution particulière + les solutions de l'équation « homogène » ; même structure que pour les équations différentielles linéaires.

Réponse. a) $P = X^2$; b) P constant ; c) $P = aX^2$; d) $P = X^2 + c$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : polynômes de Legendre et racines réelles

a) U_n a pour terme dominant X^{2n} ; sa dérivée n -ième a pour terme dominant $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.
Donc $\deg L_n = n$, coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$.

b) $L_1 = (X^2 - 1)' = 2X$, racine 0.

— $U_2 = X^4 - 2X^2 + 1$, $U_2' = 4X^3 - 4X$, $L_2 = 12X^2 - 4$, racines $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,577$ (figure).

c) Initialisation $k = 0$: $U_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$, racines ± 1 d'ordre n ✓

— **Hérédité** ($k < n$) : $U_n^{(k)}$ s'annule en -1 , en 1 et en k points distincts de $] - 1 ; 1[$: au total $k + 2$ points $t_0 = -1 < t_1 < \dots < t_{k+1} = 1$.

— **Rolle** sur chacun des $k + 1$ intervalles $[t_i; t_{i+1}]$: $U_n^{(k+1)}$ s'annule en $k + 1$ points distincts de $] - 1 ; 1[$.

— En ± 1 , une racine d'ordre $n - k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$ est d'ordre $n - k - 1$ de sa dérivée.

$$U_n^{(k)} : \pm 1 \text{ d'ordre } n - k, \text{ au moins } k \text{ racines dans }] - 1 ; 1[$$

d) Pour $k = n$: L_n a au moins n racines distinctes dans $] - 1 ; 1[$. Il est de degré n : il en a **exactement** n , toutes **simples** et réelles, dans $] - 1 ; 1[$.

— **Contrôle** $n = 2$: $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in] - 1 ; 1[$ ✓

— **Portée** : ces racines sont les nœuds de la **quadrature de Gauss**, méthode d'intégration numérique très précise.

Réponse. $\deg L_n = n$; $L_1 = 2X$, $L_2 = 12X^2 - 4$; L_n a n racines réelles simples dans $] - 1 ; 1[$.