

Plaquette 2 - Arithmétique des polynômes : restes, PGCD et Bézout

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

$K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) a la même arithmétique que $\mathbb{Z}$: division euclidienne, PGCD par Euclide, relation de **Bézout**, lemme de **Gauss**. On calcule un **reste sans poser la division** en évaluant aux racines du diviseur (et à la dérivée pour une racine double), on traduit « premiers entre eux » par « aucune racine complexe commune », et on relie les restes aux puissances de matrices et à la construction de $\mathbb{C}$.

Exercice 1 - PGCD et relation de Bézout

Soient $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 - X^2 + X - 1$.

- Factoriser A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
- En déduire $D = \text{pgcd}(A, B)$.
- Trouver U, V constants tels que $AU + BV = D$.
- Les polynômes $\frac{A}{D}$ et $\frac{B}{D}$ sont-ils premiers entre eux ? Justifier par Bézout.

Exercice 2 - PGCD de deux polynômes $X^n - 1$

- Déterminer les racines complexes de $X^4 - 1$ et de $X^6 - 1$, puis leurs racines communes.
- En déduire $\text{pgcd}(X^4 - 1, X^6 - 1)$.
- Généraliser : montrer que les racines communes de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ sont les racines d -ièmes de l'unité, avec $d = \text{pgcd}(m, n)$ (utiliser Bézout dans $\mathbb{Z}$).
- En déduire $\text{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1$ (les racines sont simples).

Exercice 3 - Reste par deux racines simples

Soit $n \geq 2$. On cherche le reste R de la division de X^n par $B = X^2 - 3X + 2$.

- Factoriser B et justifier que $R = aX + b$.
- En évaluant en les racines de B , déterminer a et b .
- Contrôler pour $n = 2$ et $n = 3$.
- Application : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$ et en déduire M^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4 - Reste modulo $X^2 + 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et R_n le reste de la division de X^n par $X^2 + 1$.

- Écrire $R_n = a_n X + b_n$ (a_n, b_n réels) et montrer que $i^n = a_n i + b_n$.
- En déduire R_n selon le reste de n modulo 4.

- c) Déterminer le reste de la division de $P = X^{2026} + X^{2027} + 1$ par $X^2 + 1$.
- d) Pour quels n le polynôme $X^2 + 1$ divise-t-il $X^n + 1$?

Exercice 5 - Reste par une racine double

Soit $n \geq 2$.

- a) Justifier que si $A = (X - 1)^2 Q + R$ avec $\deg R \leq 1$, alors $R(1) = A(1)$ et $R'(1) = A'(1)$.
- b) En déduire le reste de la division de X^n par $(X - 1)^2$.
- c) Montrer que $(X - 1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$.
- d) Application : en dérivant la somme géométrique, calculer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$, et relier au c).

Exercice 6 - Divisibilité par $X^2 + X + 1$

On pose $j = e^{2i\pi/3}$ et $P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$ pour $n \geq 1$.

- a) Montrer que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ et que $X^2 + X + 1 \mid P_n \Leftrightarrow P_n(j) = 0$ (les coefficients de P_n sont réels).
- b) Montrer que $1 + j = -j^2$ et en déduire $P_n(j) = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$.
- c) Étudier $P_n(j)$ selon le reste de n modulo 6 et conclure.
- d) Vérifier pour $n = 5$ en divisant.

Exercice 7 - Lemme de Gauss et polynômes imposés

- a) Montrer que $X - 1$ et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ en exhibant une relation de Bézout.
- b) En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par $X - 1$ et par $X^2 + 1$, alors il l'est par $(X - 1)(X^2 + 1)$.
- c) Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(1) = 0$, $P(i) = 0$ et $P(0) = 2$.
- d) Déterminer tous les polynômes P de degré ≤ 4 tels que $P(1) = P(i) = 0$ et $P(0) = 2$.

Exercice 8 - Irréductibilité

- a) Justifier qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur K si et seulement s'il n'a pas de racine dans K .
- b) $X^2 - 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$?
- c) Montrer que $X^3 - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- d) Montrer que $X^4 + 4$ n'a aucune racine réelle mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, ni même dans $\mathbb{Q}[X]$. Pourquoi a) ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 9 - Diviseurs $X^2 + aX + b$ de $X^4 + 1$

- a) Déterminer les racines complexes de $X^4 + 1$.
- b) En regroupant les racines conjuguées, factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- c) En déduire tous les couples réels (a, b) tels que $X^2 + aX + b$ divise $X^4 + 1$.
- d) Même question dans $\mathbb{C}[X]$: combien y a-t-il de diviseurs unitaires de degré 2 ?

Exercice 10 - Reste par trois racines

Soit $n \geq 3$ et $B = X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$.

- a) Justifier que le reste R de la division de X^n par B est de degré ≤ 2 et vérifie $R(0) = 0$, $R(1) = 1$, $R(-1) = (-1)^n$.
- b) En déduire R selon la parité de n .
- c) Application : calculer le reste de la division de $X^{100} + X^{51} + 3$ par $X^3 - X$.
- d) Soit M une matrice carrée telle que $M^3 = M$. Exprimer M^{100} et M^{51} en fonction de M et M^2 .

Exercice 11 - Polynômes à coefficients entiers

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que pour tous entiers a et b , $a - b$ divise $P(a) - P(b)$ (utiliser $a^k - b^k = (a - b)(\dots)$).
- b) Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(1) = 2$ et $P(3) = 5$?
- c) Montrer que si $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs, alors P n'a aucune racine entière.
- d) Application : montrer que $X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 7X + 1$ n'a pas de racine entière.

Exercice 12 - Construire $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}[X]$

On calcule dans $\mathbb{R}[X]$ **modulo** $X^2 + 1$: deux polynômes sont identifiés s'ils ont le même reste dans la division par $X^2 + 1$.

- a) Montrer que tout polynôme est congru à un unique $a + bX$ (a, b réels).
- b) Calculer le reste de $(a + bX)(c + dX)$. À quelle formule reconnaît-on ce produit ?
- c) Déterminer l'inverse de $1 + X$ modulo $X^2 + 1$ par une relation de Bézout.
- d) Pourquoi le même procédé avec $X^2 - 1$ ne donnerait-il pas un corps ?

Exercice 13 - Racines communes et PGCD

Soient $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

- a) Vérifier que $B(-1) = 0$ et factoriser B .
- b) Montrer que $A = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.
- c) En déduire $\text{pgcd}(A, B)$ et les racines complexes communes.
- d) Retrouver ce PGCD par une division euclidienne de A par B .

Exercice 14 - Division par un polynôme paramétré

Soit $P = X^4 + aX^2 + b$ et $B = X^2 + X + 1$, avec a, b réels.

- a) Calculer le reste de la division de P par B en fonction de a et b (on pourra utiliser

$$j^2 = -1 - j \text{ et } j^4 = j).$$

- b) Déterminer a et b pour que B divise P .
- c) Donner alors le quotient.
- d) Retrouver le résultat par l'identité $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2$.

Exercice 15 - Synthèse : Bézout pour deux polynômes premiers entre eux

Soient $A = (X - 1)^2$ et $B = X^2 + 1$.

- a) Justifier que $A \wedge B = 1$.
- b) Trouver U, V de degré ≤ 1 tels que $AU + BV = 1$ (on écrira $U = \alpha X + \beta$, $V = \gamma X + \delta$ et on identifiera, ou on appliquera Euclide).
- c) En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)}$ sous la forme $\frac{V}{(X - 1)^2} + \frac{U}{X^2 + 1}$, puis la décomposition complète sur $\mathbb{R}$.
- d) Vérifier en $X = 0$.