

**Plaquette 1 - Division euclidienne,
racines, factorisation et éléments simples**
Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

On divise, on factorise à partir d'une racine, on détecte les **racines multiples** par les dérivées, et on décompose une fraction rationnelle en **éléments simples** pour intégrer ou sommer.

Exercice 1 - Division euclidienne

Diviser $A = X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ par $B = X - 2$.

Exercice 2 - Reste sans division

Déterminer le reste de la division de $X^{2026} + X + 1$ par $X^2 - 1$.

Exercice 3 - Factorisation à partir d'une racine

Factoriser $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 - Racine multiple

Déterminer la multiplicité de la racine -1 dans $P = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + X$.

Exercice 5 - Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Factoriser $P = X^4 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6 - Relations coefficients-racines

Soient x_1, x_2 les racines de $X^2 - 5X + 3$. Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Exercice 7 - Interpolation

Déterminer le polynôme P de degré ≤ 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 7$.

Exercice 8 - Éléments simples, pôles simples

Décomposer $F = \frac{1}{X(X+1)}$ et en déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 9 - Éléments simples avec pôle double

Décomposer $F = \frac{X+3}{X(X-1)^2}$.

Exercice 10 - Partie entière

Décomposer $F = \frac{X^3}{X^2 - 1}$.

Exercice 11 - Élément de seconde espèce

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \frac{2X}{(X^2 + 1)(X - 1)}$.

Exercice 12 - Polynômes et équations fonctionnelles

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X + 1) = P(X)$.

Exercice 13 - PGCD par l'algorithme d'Euclide

Soient $A = X^4 - X^3 - X + 1$ et $B = X^3 - 3X + 2$.

- Effectuer la division euclidienne de A par B , puis celle de B par le reste obtenu.
- En déduire le PGCD unitaire D de A et B .
- Retrouver D en factorisant A et B à l'aide de leurs racines évidentes.
- Quelles sont les racines communes à A et B , avec leur multiplicité ?

Exercice 14 - Somme télescopique

- Décomposer $F = \frac{1}{X(X + 1)(X + 2)}$ en éléments simples.
- Vérifier que $F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X(X + 1)} - \frac{1}{(X + 1)(X + 2)} \right)$.
- En déduire $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)}$ et sa limite.
- Contrôler pour $n = 1$ et $n = 7$.

Exercice 15 - Synthèse : primitive d'une fraction rationnelle

Calculer $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$ en décomposant en éléments simples.