

## Plaquette 4 - Fractions rationnelles : décompositions, sommes et intégrales

### Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

#### Exercices

#### Méthode

On décompose une fraction rationnelle en éléments simples par la méthode la plus économique selon le cas : **évaluation** après multiplication ( $\lambda = [(X - a)F]_{X=a}$  ou  $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ ), **changement de variable**  $Y = X - a$  pour un pôle multiple, **parité, limite en  $+\infty$**  et **valeurs particulières** pour les coefficients restants. On exploite ensuite la décomposition : **dérivée logarithmique** et sommes sur les racines, **dérivées  $n$ -ièmes, primitives** ( $\ln$ ,  $\arctan$ ), **sommes télescopiques**.

#### Exercice 1 - Décomposer $1/(X^n - 1)$

Soit  $n \geq 2$  et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .

a) Montrer que les pôles de  $F = \frac{1}{X^n - 1}$  sont simples et que le coefficient associé à  $\omega^k$  vaut  $\frac{\omega^k}{n}$ .

b) En déduire  $F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$ .

c) Cas  $n = 3$  : écrire la décomposition sur  $\mathbb{C}$ , puis sur  $\mathbb{R}$  en regroupant les pôles conjugués.

d) Contrôler c) en  $X = 0$  et par la limite de  $xF(x)$  en  $+\infty$ .

#### Exercice 2 - Dérivée logarithmique et sommes sur les racines

a) Soit  $P = c \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i}$ . Démontrer que  $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - a_i}$ .

b) Soient  $x_1, x_2, x_3$  les racines de  $P = X^3 - X + 1$ . Calculer  $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2 - x_i}$ .

c) Pour  $n \geq 2$  et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ , calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 - \omega^k}$ .

d) Contrôler c) pour  $n = 2$  directement.

#### Exercice 3 - Pôle triple en 0

Soit  $F = \frac{1}{X^3(X-1)}$ .

a) Donner la forme de la décomposition en éléments simples.

b) Calculer le coefficient du pôle simple 1.

c) Pour le pôle triple 0, développer  $\frac{1}{X-1} = -\frac{1}{1-X}$  au voisinage de 0 et en déduire les trois coefficients associés.

d) Vérifier par la limite de  $xF(x)$  en  $+\infty$  et par une valeur particulière.

**Exercice 4 - Changement de variable pour un pôle multiple**

- a) Décomposer  $F = \frac{X^2}{(X-1)^3}$  en posant  $Y = X - 1$ .
- b) Décomposer  $G = \frac{X^3 + 1}{(X-1)^3}$  (attention à la partie entière).
- c) En déduire une primitive de  $x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)^3}$  sur  $]1; +\infty[$ .
- d) Calculer  $\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$ .

**Exercice 5 - Facteur irréductible au carré**

Soit  $F = \frac{1}{X(X^2 + 1)^2}$ .

- a) Donner la forme de la décomposition sur  $\mathbb{R}$  et calculer le coefficient de  $\frac{1}{X}$ .
- b) En utilisant l'impairité de  $F$  et la limite de  $x F(x)$ , déterminer tous les coefficients.
- c) Vérifier en  $X = 1$ .
- d) En déduire une primitive de  $F$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 6 - Intégrale de  $1/(x^3 + 1)$** 

- a) Décomposer  $\frac{1}{X^3 + 1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Mettre  $X^2 - X + 1$  sous forme canonique et écrire  $\frac{-X + 2}{X^2 - X + 1}$  comme combinaison de  $\frac{2X - 1}{X^2 - X + 1}$  et  $\frac{1}{X^2 - X + 1}$ .
- c) En déduire une primitive sur  $] -1; +\infty[$ .
- d) Calculer  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$ .

**Exercice 7 - Somme de  $1/(k^2 - 1)$** 

- a) Décomposer  $\frac{1}{X^2 - 1}$ .
- b) En déduire, pour  $n \geq 2$ ,  $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$  (écrire les premiers termes et observer les compensations).
- c) Calculer  $\lim S_n$ .
- d) Contrôler pour  $n = 2, 3$  et  $10$ .

**Exercice 8 - Télescopage déguisé**

- a) Vérifier que  $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ .

- b) En déduire  $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$  et sa limite.
- c) Décomposer  $\frac{2X+1}{X^2(X+1)^2}$  en éléments simples et retrouver a).
- d) Calculer de même  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$  (on écrira  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right)$ ).

### Exercice 9 - Dérivées successives de $1/(x^2 - 1)$

Soit  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  sur  $]1; +\infty[$ .

- a) Décomposer  $f$  en éléments simples.
- b) Démontrer par récurrence que  $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ .
- c) En déduire  $f^{(n)}(x)$ .
- d) Calculer  $f^{(3)}(2)$  et contrôler par un calcul direct de  $f, f'$ .

### Exercice 10 - Décomposition par la parité

Soit  $F = \frac{1}{X^4 - 1}$ .

- a) Factoriser  $X^4 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et donner la forme de la décomposition.
- b) Calculer les coefficients des pôles 1 et  $-1$ .
- c) Utiliser la parité de  $F$  pour déterminer le terme en  $\frac{\alpha X + \beta}{X^2 + 1}$ , puis vérifier en  $X = 0$ .
- d) En déduire  $\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1}$ .

### Exercice 11 - $22/7$ est plus grand que $\pi$

On considère  $I = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ .

- a) Justifier que  $I > 0$ .
- b) Effectuer la division euclidienne de  $X^4(1-X)^4$  par  $X^2 + 1$  ; on trouvera le quotient  $X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4$  et le reste  $-4$ .
- c) En déduire  $I = \frac{22}{7} - \pi$ .
- d) Encadrer  $I$  en minorant et majorant  $\frac{1}{1+x^2}$  sur  $[0; 1]$ , sachant que  $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = \frac{1}{630}$ . En déduire un encadrement de  $\pi$ .

**Exercice 12 - Pôles complexes conjugués**

- a) Décomposer  $\frac{1}{X^2 + X + 1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  (pôles  $j$  et  $j^2$ ).
- b) Retrouver la fraction de départ en regroupant les deux termes.
- c) Plus généralement, montrer que si  $F \in \mathbb{R}(X)$  a un pôle simple non réel  $a$  de coefficient  $\lambda$ , alors  $\bar{a}$  est pôle de coefficient  $\bar{\lambda}$ , et que  $\frac{\lambda}{X-a} + \frac{\bar{\lambda}}{X-\bar{a}}$  est à coefficients réels.
- d) Application : décomposer sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$  la fraction  $\frac{X}{X^2 + 4}$ .

**Exercice 13 - Somme de  $k/(k^4 + k^2 + 1)$** 

- a) Vérifier que  $k^4 + k^2 + 1 = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$ .
- b) Montrer que  $\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1} \right)$ .
- c) Observer que  $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$  et en déduire  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$ .
- d) Calculer la limite et contrôler pour  $n = 1$  et  $n = 5$ .

**Exercice 14 - Coefficients par la limite à l'infini**

Soit  $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+2)}$ .

- a) Donner la forme de la décomposition :  $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+2}$ .
- b) Calculer  $b$  et  $c$  par multiplication-évaluation.
- c) Calculer  $a$  par la limite de  $xF(x)$  en  $+\infty$ , puis vérifier en  $X = 0$ .
- d) En déduire une primitive de  $F$  sur  $]1; +\infty[$ .

**Exercice 15 - Synthèse : une série et une intégrale**

Soit  $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$  (déjà décomposée en plaquette 1 :  $\frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$ ).

- a) Calculer  $\int_1^A F(x) dx$  pour  $A > 1$  et sa limite quand  $A \rightarrow +\infty$ .
- b) Comparer avec la somme  $\sum_{k=1}^{+\infty} F(k) = \frac{1}{4}$  : justifier par un encadrement que  $\int_1^{+\infty} F \leq \sum_{k \geq 1} F(k) \leq F(1) + \int_1^{+\infty} F$ .
- c) Vérifier numériquement l'encadrement.
- d) Expliquer pourquoi la somme des coefficients  $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$  est indispensable à la convergence de l'intégrale.