

Plaquette 5 - Polynômes au service de l'analyse : synthèse

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Les polynômes sont l'outil de base de l'analyse : on **développe** autour d'un point (formule de Taylor), on **approche** une fonction (Taylor, interpolation, Bernstein) en **majorant l'erreur**, on **calcule** des sommes et des intégrales exactement (différences finies, Simpson, polynômes orthogonaux), et on **résout** des équations (Newton, récurrences linéaires, Cayley-Hamilton). Chaque exercice combine une propriété algébrique du chapitre et un résultat d'analyse.

Exercice 1 - Formule de Taylor pour un polynôme

- Écrire $P = X^3$ dans la base $(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ par la formule de Taylor en 1.
- Retrouver le résultat avec le binôme, en écrivant $X = 1 + (X - 1)$.
- En déduire que 1 est racine d'ordre exactement m de Q si et seulement si $Q(1) = \dots = Q^{(m-1)}(1) = 0 \neq Q^{(m)}(1)$.
- Application : écrire $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$ dans la base $(X - 1)^k$ et conclure.

Exercice 2 - Somme des carrés par un polynôme

On cherche $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(X + 1) - P(X) = X^2$ et $P(0) = 0$.

- Justifier que P est de degré 3 (comparer les degrés).
- Écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX$ et déterminer a, b, c .
- En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = P(n)$, puis la formule classique de $\sum_{k=1}^n k^2$.
- Vérifier pour $n = 10$ et montrer que $n(n + 1)(2n + 1)$ est toujours divisible par 6.

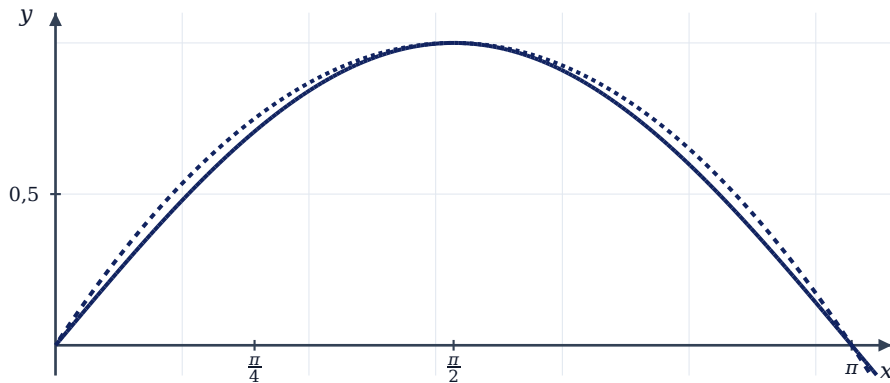
Exercice 3 - Solutions polynomiales d'équations différentielles

- Montrer que si P est un polynôme solution de $y'' + y = X^3$, alors $\deg P = 3$. Déterminer P .
- Déterminer le polynôme P tel que $P - P' = X^2$.
- Plus généralement, montrer que $P = Q + Q' + Q'' + \dots$ (somme finie) est l'unique polynôme solution de $P - P' = Q$.
- En déduire la solution générale réelle de $y'' + y = x^3$ sur $\mathbb{R}$, sachant que celles de $y'' + y = 0$ sont $A \cos x + B \sin x$.

Exercice 4 - Erreur d'interpolation pour le sinus

On interpole $f = \sin$ aux nœuds $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

- Déterminer le polynôme d'interpolation P de degré ≤ 2 .
- Calculer $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et l'erreur commise par rapport à $\sin \frac{\pi}{4}$.
- Majorer l'erreur en $x = \frac{\pi}{4}$ par la formule $\frac{M_3}{3!} \left| x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi) \right|$, avec $M_3 = \sup |\sin'''| = 1$. Comparer.
- La figure compare $\sin$ et P sur $[0; \pi]$: où l'écart semble-t-il maximal ?



sin (trait plein) et son interpolant P (pointillés).

Exercice 5 - Méthode de Newton pour la racine cubique de 2

On cherche la racine réelle $\alpha = \sqrt[3]{2}$ de $P = X^3 - 2$.

- Écrire l'itération de Newton $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$ sous la forme $x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 2}{3x_k^2}$.
- Partant de $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2, x_3 .
- Montrer que $x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^2(2x_k + \alpha)}{3x_k^2}$ et en déduire que l'erreur est approximativement **élevée au carré** à chaque étape.
- Combien de décimales exactes obtient-on à x_4 ?

Exercice 6 - Polynômes orthogonaux

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

- Calculer $\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, X \rangle, \langle X, X \rangle, \langle 1, X^2 \rangle, \langle X, X^2 \rangle$.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ pour obtenir une base orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2) avec coefficients dominants 1.
- Comparer Q_2 avec le polynôme de Legendre $L_2 = 12X^2 - 4$ de la plaquette 3.
- Déterminer le polynôme R de degré ≤ 2 qui minimise $\int_{-1}^1 (t^3 - R(t))^2 dt$ (projection orthogonale de X^3).

Exercice 7 - Méthode de Simpson exacte en degré 3

Soit $S(P) = \frac{b-a}{6}(P(a) + 4P(m) + P(b))$ avec $m = \frac{a+b}{2}$.

- Vérifier que $S(P) = \int_{-1}^1 P$ pour $P = 1, X, X^2, X^3$ sur $[-1; 1]$.
- En déduire (linéarité) que la formule est exacte pour tout polynôme de degré ≤ 3 sur $[-1; 1]$, puis sur tout $[a; b]$ (changement de variable affine).
- Calculer $\int_0^2 (t^3 - 2t + 1) dt$ par Simpson et directement.
- Montrer que la formule n'est pas exacte pour t^4 sur $[0; 2]$ et calculer l'erreur.

Exercice 8 - Différences finies

On note $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ et Δ^k l'itérée.

- Montrer que si $\deg P = d \geq 1$ avec coefficient dominant a , alors $\deg \Delta P = d - 1$ et son coefficient dominant est da .
- En déduire $\Delta^d P = d! a$ (constant) et $\Delta^{d+1} P = 0$.
- Dresser le tableau des différences successives de k^3 pour $k = 0, \dots, 5$ et vérifier b).
- On sait qu'une suite (u_k) est polynomiale de degré 2 avec $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 11$. Prédire u_3, u_4 par le tableau des différences, puis trouver le polynôme.

Exercice 9 - Degré impair et racine réelle

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Montrer que P a au moins une racine réelle (limites en $\pm\infty$ et théorème des valeurs intermédiaires).
- Donner un polynôme réel de degré pair sans racine réelle.
- Retrouver a) par un argument algébrique : les racines non réelles vont par paires conjuguées.
- Application : montrer que $x^5 - 3x + 1 = 0$ a au moins une solution dans $[0; 1]$ et au moins trois solutions réelles.

Exercice 10 - Suites récurrentes linéaires

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

- Montrer que (r^n) vérifie la récurrence si et seulement si r est racine du **polynôme caractéristique** $X^2 - X - 2$. Le factoriser.
- On admet que toute solution s'écrit $u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Déterminer α et β .
- Vérifier sur les premiers termes.
- Retrouver ce résultat par les matrices : avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et calculer M^n par le reste de X^n modulo $X^2 - X - 2$.

Exercice 11 - Cayley-Hamilton en dimension 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier par le calcul que $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.
- b) En déduire que si $\det M \neq 0$, $M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\operatorname{tr}(M)I_2 - M)$, et retrouver la formule usuelle de l'inverse.
- c) Application : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer M^{-1} et M^3 en fonction de M et I_2 .
- d) Pourquoi le polynôme $X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det M$ joue-t-il le rôle du « $X^2 - 3X + 2$ » de la plaquette 2 ?

Exercice 12 - Parité et polynômes

- a) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ est pair ($P(-X) = P(X)$) si et seulement si ses coefficients d'indice impair sont nuls, c'est-à-dire $P = Q(X^2)$.
- b) Soit P pair et $a \neq 0$ une racine de multiplicité m . Montrer que $-a$ est racine de même multiplicité.
- c) Déterminer les polynômes P de degré ≤ 4 , pairs, tels que $P(1) = 0$, $P(0) = 1$ et $P(2) = -3$.
- d) Montrer qu'un polynôme vérifiant $P(1 - X) = P(X)$ s'écrit $Q\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)$.

Exercice 13 - Approcher e par Taylor

Soit $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, polynôme de Taylor de $\exp$ en 0.

- a) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0; 1]$, montrer que $0 \leq e - T_n(1) \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$.
- b) Calculer $T_6(1)$ et majorer l'erreur. Comparer avec $e \approx 2,71828$.
- c) Quel n garantit une erreur inférieure à 10^{-6} ?
- d) En déduire que e est irrationnel : si $e = \frac{p}{q}$, considérer $q!(e - T_q(1))$.

Exercice 14 - Polynômes à valeurs entières

- a) Montrer que $B_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ bien que ses coefficients ne soient pas entiers.
- b) Plus généralement, $B_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ vérifie $B_k(n) = \binom{n}{k}$ pour $n \geq k$. Montrer que $B_k(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (pour $n < 0$, relier à un coefficient binomial).
- c) Écrire X^2 et X^3 comme combinaisons à coefficients **entiers** de $B_0 = 1$, $B_1 = X$, B_2 , B_3 .
- d) En déduire que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est entier pour tout n , sans raisonner modulo 2 et 3.

Exercice 15 - Synthèse : polynômes de Bernstein

Pour $f:[0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, le **polynôme de Bernstein** est

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

- a) Calculer $B_n(f)$ pour $f = 1$ puis $f(x) = x$ (on utilisera $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$).
- b) Pour $f(x) = x^2$, montrer que $B_n(f)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.
- c) En déduire que $|B_n(f)(x) - x^2| \leq \frac{1}{4n}$ sur $[0;1]$. Vérifier pour $n = 5$, $x = 0,3$.
- d) Interprétation probabiliste : si S_n suit la loi binomiale $B(n, x)$, montrer que $B_n(f)(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ et relier b) à $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$.