

Plaquette 3 - Racines, multiplicités et factorisation avancée

Polynômes et fractions rationnelles — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On étudie les **racines** d'un polynôme sans forcément les calculer : leur **multiplicité** par les dérivées successives, leur **nombre** par le théorème de Rolle et l'étude de fonction, leurs **fonctions symétriques** (sommes, sommes de puissances) par les relations coefficients-racines et les identités de Newton. On construit aussi des polynômes à partir de valeurs imposées (**Lagrange**, **Hermite**) et on résout des **équations fonctionnelles** polynomiales en suivant les racines.

Exercice 1 - Imposer une racine double

Soit $P = X^5 + aX + b$ avec a, b réels.

- Traduire « 1 est racine au moins double de P » par deux équations, et déterminer a et b .
- Vérifier que 1 n'est pas racine triple.
- Factoriser P par $(X - 1)^2$.
- Montrer que le quotient obtenu n'a pas d'autre racine réelle positive, et qu'il a exactement une racine réelle, négative.

Exercice 2 - Racines multiples par le PGCD avec la dérivée

Soit $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

- Calculer P' puis $\text{pgcd}(P, P')$ par l'algorithme d'Euclide.
- Justifier que les racines de $P \wedge P'$ sont exactement les racines multiples de P .
- En déduire la factorisation complète de P .
- Vérifier les multiplicités par les dérivées successives.

Exercice 3 - Factoriser $X^6 - 1$ et $X^n - 1$

- Factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- En regroupant les racines conjuguées, factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Plus généralement, pour $n = 2m + 1$ impair, montrer que

$$X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^m \left(X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} X + 1 \right)$$

- Écrire la factorisation réelle de $X^5 - 1$.

Exercice 4 - Sommes de Newton

Soient x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $P = X^3 - X + 1$. On note $p_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$.

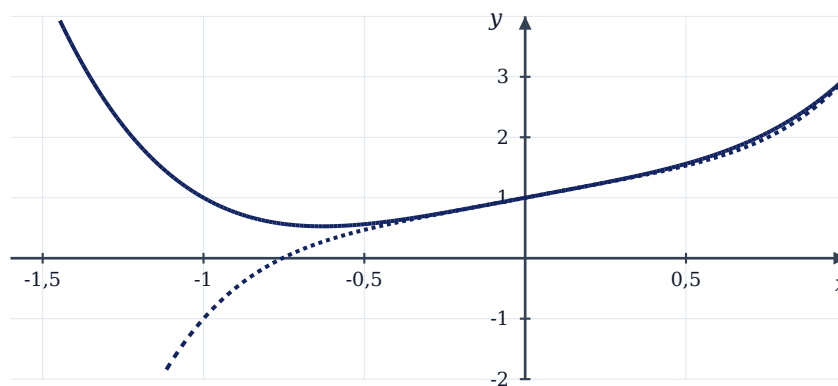
- Donner $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ puis p_1 et p_2 .

- b) En utilisant $x_i^3 = x_i - 1$, calculer p_3 , puis p_4 (multiplier par x_i).
- c) Établir la relation de récurrence $p_{k+3} = p_{k+1} - p_k$ et calculer p_5 .
- d) Montrer que P a une seule racine réelle.

Exercice 5 - Nombre de racines réelles par Rolle

Soient $n \geq 2$ et a, b réels, $P = X^n + aX + b$.

- a) Énoncer le théorème de Rolle et montrer que si P a k racines réelles distinctes, alors P' en a au moins $k - 1$.
- b) En déduire que P a au plus 3 racines réelles distinctes (et au plus 2 si n est pair).
- c) Étude de $X^n + X + 1$: montrer qu'il a exactement une racine réelle si n est impair, et aucune si n est pair.
- d) Contrôler sur la figure pour $n = 4$ et $n = 5$.



$x \mapsto x^4 + x + 1$ (trait plein) et $x \mapsto x^5 + x + 1$ (pointillés).

Exercice 6 - Une équation fonctionnelle polynomiale

On cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

- a) Trouver les solutions constantes. Vérifier que $P = (X^2 - X)^n$ est solution pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Soit P non constant et α une racine. Montrer que α^2 est racine, puis que $|\alpha| \in \{0, 1\}$ (considérer la suite α^{2^k}).
- c) Montrer que $(\alpha - 1)^2$ est aussi racine, puis que $|\alpha - 1| \in \{0, 1\}$. En déduire que $\alpha \in \{0, 1, e^{\pm i\pi/3}\}$, puis éliminer $e^{\pm i\pi/3}$.
- d) Conclure.

Exercice 7 - Interpolation de Lagrange

Soient $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

- a) Écrire les polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés et vérifier $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.
- b) En déduire l'unique P de degré ≤ 2 tel que $P(0) = 1, P(1) = 3, P(2) = 7$.
- c) Montrer que $L_0 + L_1 + L_2 = 1$ et que $0 \cdot L_0 + 1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 = X$.
- d) Pourquoi l'unicité en b) est-elle garantie ?

Exercice 8 - Valeur suivante d'un interpolant

Soit $n \geq 1$ et P l'unique polynôme de degré $\leq n$ tel que $P(k) = \frac{1}{k+1}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

- On pose $Q = (X+1)P - 1$. Donner son degré et ses racines.
- En déduire $Q = cX(X-1)\cdots(X-n)$ et calculer c en évaluant en -1 .
- En déduire $P(n+1) = \frac{1 + (-1)^n}{n+2}$.
- Vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$ par un calcul direct.

Exercice 9 - Polynôme positif et somme de deux carrés

- Écrire $X^4 + 1$ et $X^2 + 2X + 5$ comme sommes de deux carrés de polynômes réels.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire sans racine réelle. Justifier que $P = Q\overline{Q}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$ regroupe une racine de chaque paire conjuguée, et $\overline{Q}$ a les coefficients conjugués.
- En écrivant $Q = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$, en déduire $P = A^2 + B^2$.
- Application : écrire $(X^2 + 1)(X^2 + 4)$ comme somme de deux carrés par la méthode de c).

Exercice 10 - Polynôme des carrés des racines

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $P = X^3 - 2X + 3$.

- Donner $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
- Calculer les fonctions symétriques élémentaires de $y_i = x_i^2$: $\sum y_i$, $\sum_{i < j} y_i y_j$ et $y_1 y_2 y_3$. (Pour la deuxième, développer σ_2^2 .)
- En déduire le polynôme unitaire R de racines x_1^2, x_2^2, x_3^2 .
- Vérifier le résultat par l'astuce $P(X)P(-X) = -R(X^2)$.

Exercice 11 - Système symétrique

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

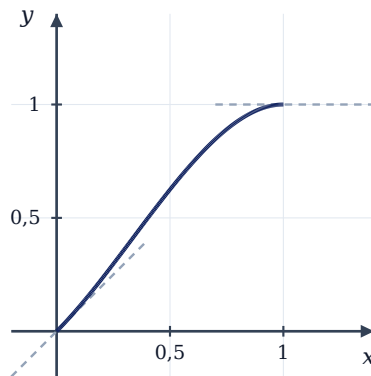
$$x + y + z = 2, \quad xy + yz + zx = -5, \quad xyz = -6$$

- Montrer que x, y, z sont les racines de $T^3 - 2T^2 - 5T + 6$.
- Factoriser ce polynôme et conclure. Combien y a-t-il de triplets solutions ?
- Calculer sans les racines $x^2 + y^2 + z^2$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, et vérifier.
- Résoudre de même $x + y = 5, xy = 7$ dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 12 - Interpolation d'Hermite

On cherche P de degré ≤ 3 tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$.

- Justifier l'unicité d'un tel polynôme (considérer la différence de deux solutions et ses racines doubles).
- Déterminer P .
- Interpréter graphiquement : raccord d'une montée de pente 1 à un palier.
- Plus généralement, montrer qu'il existe un unique P de degré ≤ 3 avec $P(0) = a$, $P'(0) = b$, $P(1) = c$, $P'(1) = d$ (système linéaire 4×4).



La courbe cherchée raccorde la droite $y = x$ en 0 à la droite $y = 1$ en 1.

Exercice 13 - Relations coefficients-racines et paramètre

Soit $P = X^3 - 7X + \lambda$ avec λ réel.

- On suppose qu'une racine est le double d'une autre : $x_2 = 2x_1$. En utilisant $\sigma_1 = 0$, exprimer x_3 en fonction de x_1 .
- Avec $\sigma_2 = -7$, déterminer x_1 puis λ .
- Vérifier en factorisant P pour les valeurs trouvées.
- Déterminer λ pour que P ait une racine double (utiliser $4p^3 + 27q^2 = 0$ ou $P = P' = 0$).

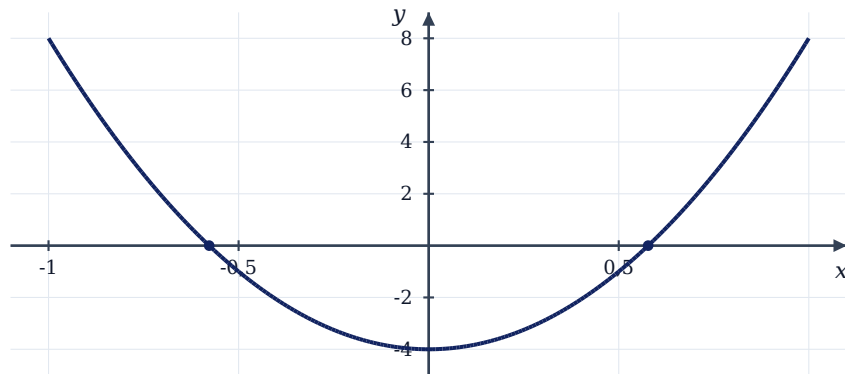
Exercice 14 - Polynômes et limites de degré

- Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(n) = n^2$ pour une infinité d'entiers n , alors $P = X^2$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x+1) = P(x)$ pour tout réel x . Montrer que P est constant.
- Soit P non nul tel que $P(2X) = 4P(X)$. Déterminer P (comparer les coefficients).
- Déterminer les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = 2X + 1$.

Exercice 15 - Synthèse : polynômes de Legendre et racines réelles

Pour $n \geq 1$, on pose $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = U_n^{(n)}$ (dérivée n -ième).

- Donner le degré de L_n et son coefficient dominant.
- Calculer L_1 et L_2 et leurs racines.
- Montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $U_n^{(k)}$ admet -1 et 1 comme racines d'ordre $n - k$ et au moins k racines distinctes dans $] -1 ; 1[$ (théorème de Rolle).
- En déduire que L_n a exactement n racines réelles, simples, toutes dans $] -1 ; 1[$.



La courbe de $L_2 = 12x^2 - 4$ sur $[-1; 1]$ et ses deux racines.