

Polynômes et fractions rationnelles

Licence 1 - Fiche de révision

1. Polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

$P = Q$ ssi tous les coefficients coïncident.

Si $P \neq 0$: degré = $\max\{k : a_k \neq 0\}$.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Polynôme $\neq$ fonction

$P \in \mathbb{K}[X]$ est formel. La fonction associée est $x \mapsto P(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, même fonction polynomiale $\Rightarrow$ mêmes coefficients, mais ce n'est pas la définition de P .

2. Division euclidienne

Pour $B \neq 0$, il existe un unique (Q, R) :

$$A = BQ + R$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$. $B \mid A \iff R = 0$.

3. Théorème du reste

Division par $X - a$:

$$P = (X - a)Q + P(a).$$

Donc

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P.$$

4. PGCD et Bézout

PGCD choisi unitaire.

$$\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$$

si $A = BQ + R$.

Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$:

$$AU + BV = \text{pgcd}(A, B).$$

Coprimalité : $\text{pgcd}(A, B) = 1$ ssi $AU + BV = 1$.

5. Multiplicité

a racine de multiplicité m :

$$P = (X - a)^m Q, \quad Q(a) \neq 0.$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Racine multiple $\iff P(a) = P'(a) = 0$.

6. Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré n a **au plus n racines distinctes**.

Dans $\mathbb{C}$, il a exactement n racines en comptant les multiplicités.

7. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant a une racine complexe.

$$P = a_n \prod_j (X - z_j)^{m_j}.$$

Somme des multiplicités = $\deg P$.

8. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Facteurs irréductibles :

- $X - a$, $a \in \mathbb{R}$;
- $X^2 + pX + q$ avec $\Delta < 0$.

Les racines complexes non réelles vont par paires conjuguées.

9. Viète

Si $P = a_n \prod_{j=1}^n (X - r_j)$:

$$\sum r_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\prod r_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Pour $aX^2 + bX + c$:

$$r_1 + r_2 = -b/a, \quad r_1 r_2 = c/a.$$

Fractions rationnelles - méthodes et pièges

10. Fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q}, \quad Q \neq 0.$$

Réduire d'abord les facteurs communs.
Forme propre si

$$\deg P < \deg Q.$$

11. Partie entière

Division $P = QS + R$:

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}, \quad \deg R < \deg Q.$$

Toujours faire cette étape avant les éléments simples si la fraction n'est pas propre.

12. Pôles

Dans une forme irréductible, les zéros de Q sont les pôles.

Si

$$Q = (X - a)^m S, \quad S(a) \neq 0,$$

a est un pôle d'ordre m .

Racine : numérateur. **Pôle** : dénominateur.

13. Éléments simples sur $\mathbb{C}$

Si

$$Q = \prod_j (X - a_j)^{m_j},$$

alors

$$\frac{P}{Q} = \sum_j \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(X - a_j)^k}$$

pour la partie propre.

14. Éléments simples sur $\mathbb{R}$

Facteur linéaire $(X - a)^m$:

$$\frac{A_1}{X - a} + \dots + \frac{A_m}{(X - a)^m}.$$

Quadratique irréductible q^m :

$$\frac{B_1 X + C_1}{q} + \dots + \frac{B_m X + C_m}{q^m}.$$

15. Trouver les coefficients

Après multiplication par le dénominateur commun :

- substituer les racines simples ;
- identifier les coefficients ;
- utiliser éventuellement le comportement à l'infini.

Puis recomposer pour vérifier.

Exemple 1

$$\frac{2X + 3}{(X - 1)(X + 2)} = \frac{A}{X - 1} + \frac{B}{X + 2}.$$

$$X = 1 \Rightarrow A = 5/3.$$

$$X = -2 \Rightarrow B = 1/3.$$

$$F = \frac{5}{3(X - 1)} + \frac{1}{3(X + 2)}.$$

Exemple 2 - facteur multiple

$$\frac{X + 1}{X(X - 1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X - 1} + \frac{C}{(X - 1)^2}.$$

On trouve

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

Exemple 3 - quadratique

$$\frac{1}{X(X^2 + 1)} = \frac{A}{X} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}.$$

Identification :

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Donc $F = 1/X - X/(X^2 + 1)$.

Checklist de décomposition

1. Simplifier.
2. Extraire la partie entière.
3. Factoriser Q dans le corps demandé.
4. Écrire **tous** les étages.
5. Calculer les coefficients.
6. Vérifier.

Pièges à éviter

- Oublier les puissances intermédiaires d'un facteur multiple.
- Mettre une constante au-dessus d'un quadratique réel : il faut $BX + C$.
- Dire "degré $n = n$ racines réelles" : faux.
- Chercher les pôles avant simplification.

À savoir par cœur

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P.$$

Multiplicité m :

$$(X - a)^m \mid P,$$

mais $(X - a)^{m+1} \nmid P$.

$\mathbb{C}[X]$: facteurs linéaires.

$\mathbb{R}[X]$: facteurs linéaires et quadratiques irréductibles ($\Delta < 0$).