

Polynômes et fractions rationnelles

Licence 1 (L1) - Cours complet

Degré, division euclidienne, racines, factorisation et éléments simples

Idée directrice. Un polynôme est d'abord un objet formel de $\mathbb{K}[X]$ et non une simple fonction. Son arithmétique ressemble à celle de $\mathbb{Z}$: division euclidienne, divisibilité, PGCD et Bézout. Les racines contrôlent ensuite la factorisation, et cette factorisation permet de décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

1. Polynômes : définition et vocabulaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Un **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est une expression formelle

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad a_k \in \mathbb{K},$$

où seuls un nombre fini de coefficients sont non nuls. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux :

$$P = Q \iff \forall k \geq 0, a_k = b_k.$$

Le **polynôme nul** est noté 0.

Définition

Si $P \neq 0$, son **degré** est

$$\deg P = \max\{k; a_k \neq 0\}.$$

Le coefficient $a_{\deg P}$ est le **coefficient dominant**. Un polynôme est **unitaire** si ce coefficient vaut 1.

Par convention, on pose souvent $\deg 0 = -\infty$, ce qui simplifie les formules de degré.

Polynôme et fonction polynomiale

Le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un objet formel. La fonction associée est

$$\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x).$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, deux polynômes donnant la même fonction sont égaux. Cette identification n'est toutefois pas la définition d'un polynôme, et elle devient fausse sur certains corps finis.

2. Opérations et degré

Pour

$$P = \sum a_k X^k, \quad Q = \sum b_k X^k,$$

on définit la somme coefficient par coefficient et le produit par convolution :

$$PQ = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.$$

Si $P, Q \neq 0$:

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Il peut y avoir stricte inégalité dans la seconde formule si les termes dominants se compensent.

Exemple

Pour $P = 2X^3 - X + 1$ et $Q = -2X^3 + 5X^2$, on a

$$\deg P = \deg Q = 3,$$

mais

$$P + Q = 5X^2 - X + 1$$

est de degré 2.

3. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg B.$$

Q est le quotient et R le reste.

Division posée

On annule successivement le terme de plus haut degré du dividende :

1. diviser le terme dominant courant par le terme dominant de B ;
2. multiplier B par ce monôme ;
3. soustraire ;
4. recommencer jusqu'à obtenir un reste de degré strictement inférieur à celui de B .

Exemple

Divisons $A = X^3 + 2X^2 - X + 3$ par $B = X - 1$. On obtient

$$A = (X - 1)(X^2 + 3X + 2) + 5.$$

Ainsi le quotient est $X^2 + 3X + 2$ et le reste est 5.

Divisibilité

Définition

Pour $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que A **divise** B , noté $A \mid B$, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$.

Pour $a \in \mathbb{K}$, le reste de la division de P par $X - a$ est $P(a)$:

$$P = (X - a)Q + P(a).$$

C'est le **théorème du reste**.

Caractérisation des racines

Pour $a \in \mathbb{K}$,

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P.$$

4. PGCD, algorithme d'Euclide et Bézout

Un PGCD de $A, B \in \mathbb{K}[X]$, non tous deux nuls, est choisi **unitaire**. Il est alors unique et noté $\text{pgcd}(A, B)$.

Théorème

Si $A = BQ + R$, alors

$$\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R).$$

Ainsi l'algorithme d'Euclide fonctionne dans $\mathbb{K}[X]$ comme dans $\mathbb{Z}$.

Bézout dans $\mathbb{K}[X]$

Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AU + BV = \text{pgcd}(A, B).$$

En particulier,

$$\text{pgcd}(A, B) = 1 \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X], AU + BV = 1.$$

5. Racines et multiplicité**Définition**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine de multiplicité** $m \geq 1$ si

$$(X - a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X - a)^{m+1} \nmid P.$$

Autrement dit,

$$P = (X - a)^m Q \quad \text{avec} \quad Q(a) \neq 0.$$

Critère par les dérivées successives

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a est racine de multiplicité exactement m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0, \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Exemple

Pour

$$P(X) = (X - 2)^3(X + 1),$$

2 est racine triple et -1 racine simple. On a donc

$$P(2) = P'(2) = P''(2) = 0, \quad P^{(3)}(2) \neq 0.$$

Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré n sur un corps possède au plus n racines distinctes.

Piège classique

Un polynôme non nul de degré n n'a pas nécessairement n racines dans le corps considéré. Par exemple $X^2 + 1$ n'a aucune racine réelle, mais possède deux racines complexes.

Racines communes et dérivée

Une racine a est multiple si et seulement si elle est racine commune de P et P' :

$$a \text{ multiple pour } P \iff P(a) = P'(a) = 0.$$

Par conséquent,

$$P \text{ n'a que des racines simples} \iff \text{pgcd}(P, P') = 1$$

lorsque P est scindé dans le corps considéré.

6. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Par récurrence sur le degré, tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ se factorise sous la forme

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{m_k}$$

où les z_k sont les racines distinctes, $m_k \geq 1$ et

$$m_1 + \cdots + m_r = n.$$

On dit que $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.

7. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine, alors $\bar{z}$ est aussi racine, avec la même multiplicité. En effet,

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}.$$

Le produit associé à une paire conjuguée est réel :

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\Re(z)X + |z|^2,$$

et son discriminant est strictement négatif.

Factorisation réelle

Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ se factorise comme produit :

- de facteurs linéaires $X - a$, $a \in \mathbb{R}$;
 - de facteurs quadratiques irréductibles $X^2 + pX + q$ dont le discriminant est négatif.
- Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs et aux constantes multiplicatives près.

Exemple

Dans $\mathbb{R}[X]$,

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1),$$

et chaque facteur quadratique a un discriminant $-2 < 0$.

Factoriser un polynôme réel

1. chercher d'abord les racines réelles évidentes ou rationnelles ;
2. extraire les facteurs $X - a$ et tenir compte de leur multiplicité ;
3. factoriser le quotient restant ;
4. si nécessaire, passer par les racines complexes puis regrouper les paires conjuguées.

8. Relations entre coefficients et racines

Soit

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n \prod_{j=1}^n (X - r_j),$$

où les racines r_j sont répétées selon leur multiplicité.

Les premières formules de Viète sont

$$\sum_{j=1}^n r_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

et

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

avec alternance des signes jusqu'à

$$\prod_{j=1}^n r_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Pour un trinôme $aX^2 + bX + c$ de racines r_1, r_2 :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple

Si $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, les racines r_1, r_2, r_3 vérifient

$$r_1 + r_2 + r_3 = 6, \quad r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 11, \quad r_1 r_2 r_3 = 6.$$

On reconnaît 1, 2, 3, donc $P = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

9. Fractions rationnelles

Définition

Le corps des **fractions rationnelles** sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$. Une fraction rationnelle s'écrit

$$F = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \neq 0.$$

Deux écritures P/Q et R/S représentent la même fraction si

$$PS = RQ.$$

On choisit souvent une forme irréductible, c'est-à-dire $\text{pgcd}(P, Q) = 1$.

Partie entière

La division euclidienne de P par Q donne

$$P = QS + R, \quad \deg R < \deg Q,$$

donc

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}.$$

S est la **partie entière** de la fraction rationnelle. La fraction R/Q est dite **propre**.

Exemple

$$\frac{X^3 + 1}{X^2 - 1} = X + \frac{X + 1}{X^2 - 1} = X + \frac{1}{X - 1}$$

après simplification sur le domaine où l'expression initiale est définie.

Pôles

Si P/Q est irréductible, les zéros de Q sont les **pôles**. Si

$$Q = (X - a)^m S, \quad S(a) \neq 0,$$

alors a est un pôle d'ordre m .

Racine ou pôle ?

Une racine concerne le numérateur (après simplification), tandis qu'un pôle concerne le dénominateur d'une forme irréductible. Il faut donc toujours simplifier les facteurs communs avant d'identifier les pôles.

10. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = P/Q$ propre et irréductible. Si

$$Q(X) = \prod_{j=1}^r (X - a_j)^{m_j},$$

alors il existe des coefficients uniques $c_{j,k} \in \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(X - a_j)^k}.$$

Pour une fraction non propre, on ajoute d'abord sa partie entière.

Exemple

Décomposons

$$\frac{2X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2}.$$

En multipliant par le dénominateur :

$$2X+3 = A(X+2) + B(X-1).$$

En $X = 1$, $5 = 3A$, donc $A = 5/3$. En $X = -2$, $-1 = -3B$, donc $B = 1/3$. Ainsi

$$\frac{2X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{5}{3(X-1)} + \frac{1}{3(X+2)}.$$

11. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}[X]$, le dénominateur se factorise en facteurs linéaires et quadratiques irréductibles. Si

$$Q = \prod_i (X - a_i)^{m_i} \prod_j q_j(X)^{n_j},$$

où $\deg q_j = 2$ et $\Delta(q_j) < 0$, alors la partie propre de F s'écrit comme somme de termes

$$\frac{A_{i,k}}{(X - a_i)^k}$$

et

$$\frac{B_{j,k}X + C_{j,k}}{q_j(X)^k}.$$

Le numérateur placé au-dessus d'un facteur irréductible doit avoir un degré strictement inférieur à celui de ce facteur.

Exemple

Pour

$$F(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)},$$

on cherche

$$\frac{1}{X(X^2 + 1)} = \frac{A}{X} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}.$$

Après multiplication :

$$1 = A(X^2 + 1) + X(BX + C).$$

L'identification donne $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, donc

$$\boxed{\frac{1}{X(X^2 + 1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2 + 1}.}$$

Facteurs multiples

Si le dénominateur contient $(X - a)^m$, il faut tous les termes

$$\frac{A_1}{X - a} + \frac{A_2}{(X - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(X - a)^m}.$$

Si un facteur quadratique irréductible q apparaît à la puissance m , il faut

$$\frac{B_1X + C_1}{q} + \frac{B_2X + C_2}{q^2} + \dots + \frac{B_mX + C_m}{q^m}.$$

Piège classique

Oublier un étage dans un facteur multiple rend la décomposition impossible. Par exemple, pour $(X - 1)^3$, il faut trois termes, de puissances 1, 2 et 3.

12. Comment déterminer les coefficients ?

Trois techniques se combinent souvent.

Méthode

- 1. Valeurs bien choisies.** Après avoir multiplié par le dénominateur commun, substituer les racines des facteurs linéaires pour isoler certains coefficients.
- 2. Identification.** Développer puis identifier les coefficients de chaque puissance de X .
- 3. Limites ou comportement à l'infini.** Pour certaines fractions, comparer les termes dominants fournit rapidement une relation supplémentaire.

Exemple

Décomposons

$$\frac{X + 1}{X(X - 1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X - 1} + \frac{C}{(X - 1)^2}.$$

On obtient

$$X + 1 = A(X - 1)^2 + BX(X - 1) + CX.$$

En $X = 0$, $A = 1$. En $X = 1$, $C = 2$. En identifiant le coefficient de X^2 , $A + B = 0$, donc $B = -1$. Ainsi

$$\boxed{\frac{X + 1}{X(X - 1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2}.}$$

13. Applications aux primitives

La décomposition en éléments simples transforme une fraction rationnelle en une somme de briques dont les primitives sont connues.

Sur $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \geq 2),$$

et, après complétion du carré, les facteurs quadratiques donnent des logarithmes et des arctangentes.

Exemple

À partir de

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1},$$

on obtient sur tout intervalle ne contenant pas 0 :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

14. Méthodes de démonstration et réflexes

Montrer que a est racine de multiplicité m

Deux méthodes équivalentes :

- factoriser $P = (X-a)^m Q$ et vérifier $Q(a) \neq 0$;
- vérifier $P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Décomposer une fraction rationnelle

1. simplifier les facteurs communs ;
2. si $\deg P \geq \deg Q$, effectuer la division euclidienne ;
3. factoriser complètement Q dans le corps demandé ;
4. écrire la forme générale avec tous les étages des facteurs multiples ;
5. déterminer les coefficients ;
6. contrôler en recomposant la fraction.

Trois erreurs fréquentes

- Confondre P et la fonction $x \mapsto P(x)$.
- Affirmer qu'un polynôme de degré n possède toujours n racines dans $\mathbb{R}$: faux. Il en possède au plus n , et exactement n dans $\mathbb{C}$ en comptant les multiplicités.
- Décomposer une fraction non propre sans extraire d'abord sa partie entière.

15. Exercices corrigés essentiels

Exercice 1 - Multiplicité

Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de

$$P = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1.$$

On reconnaît

$$P = (X-1)^4.$$

Donc 1 est racine de multiplicité 4.

Exercice 2 - Factorisation réelle

Factoriser $X^4 - 5X^2 + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$. Posons $Y = X^2$:

$$Y^2 - 5Y + 6 = (Y - 2)(Y - 3).$$

Ainsi

$$X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2 - 2)(X^2 - 3)$$

et, sur $\mathbb{R}$,

$$= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}).$$

Exercice 3 - Éléments simples

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{(X - 1)(X^2 + 1)}.$$

On pose

$$\frac{1}{(X - 1)(X^2 + 1)} = \frac{A}{X - 1} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}.$$

En $X = 1$, $A = 1/2$. Puis identification : $B = -1/2$ et $C = -1/2$. Donc

$$\frac{1}{(X - 1)(X^2 + 1)} = \frac{1}{2(X - 1)} - \frac{X + 1}{2(X^2 + 1)}.$$

À retenir absolument

- $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$: division euclidienne.
- $P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P$; multiplicité $m \iff (X - a)^m \mid P$ mais $(X - a)^{m+1} \nmid P$.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme se scinde en facteurs linéaires ; dans $\mathbb{R}[X]$, il reste au plus des quadratiques irréductibles.
- Une fraction rationnelle se traite dans l'ordre : simplification, partie entière, factorisation du dénominateur, éléments simples.