

Plaquelette 4 - Algèbre linéaire numérique : pivot, itérations, applications

Python et calcul scientifique — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On programme les algorithmes de l'algèbre linéaire vus en cours (pivot de Gauss, déterminant, inverse, rang) en **fractions exactes** (module *fractions*) pour valider, puis en **flottants** pour mesurer l'effet des arrondis. On découvre aussi les méthodes **itératives** (puissance, Jacobi, chaînes de Markov, PageRank), qui ne résolvent pas exactement mais convergent, parfois très vite, et passent à de très grandes tailles.

Exercice 1 - Programmer le pivot de Gauss

- Écrire *gauss*(*A*, *b*) résolvant $AX = b$ (*A* inversible) : triangulation avec recherche d'un pivot non nul, puis remontée. On travaillera avec des *Fraction*.
- Tester sur le système $2x + y - z = 1$, $x - y + 2z = 5$, $3x + 2y + z = 10$; le programme renvoie (1, 2, 3). Vérifier.
- Compter les multiplications de la phase de triangulation pour une matrice $n \times n$ et montrer qu'elles sont $\approx \frac{n^3}{3}$.
- Pourquoi utiliser des fractions pour valider le programme ?

Exercice 2 - Déterminant par élimination

- Adapter le pivot pour calculer $\det A$ comme produit des pivots (avec un changement de signe à chaque échange de lignes, et 0 si une colonne n'a pas de pivot).
- Le programme renvoie 4 pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 1 pour la matrice de Pascal 4×4 et 0 pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Vérifier le premier par Sarrus.
- Pourquoi le premier exemple impose-t-il un échange de lignes ?
- Comparer le coût ($\approx \frac{n^3}{3}$) à celui de la formule développée ($n!$ termes) pour $n = 20$.

Exercice 3 - Inverse par Gauss-Jordan

- Écrire *inverse*(*A*) : on échelonne la matrice augmentée ($A \mid I_n$) en normalisant chaque pivot à 1 et en annulant la colonne **au-dessus et au-dessous**.
- Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le programme renvoie les lignes $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{12})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12})$. Vérifier une ligne de BB^{-1} .
- Comparer au résultat de la comatrice (déterminant 12).

d) Pour résoudre $BX = c$, vaut-il mieux calculer B^{-1} puis $B^{-1}c$, ou appliquer directement Gauss ?

Exercice 4 - Calculer un rang

a) Écrire $\text{rang}(A)$ pour une matrice rectangulaire : on parcourt les colonnes, on cherche un pivot non nul **sous les lignes déjà traitées**, et on compte les pivots.

b) Le programme renvoie 2 pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 1 pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et 3 pour B (exercice précédent). Justifier les deux premiers résultats.

c) Pourquoi faut-il travailler en fractions ? Que pourrait renvoyer un calcul en flottants sur une matrice de rang 2 ?

d) En déduire $\dim \ker A$ pour la première matrice.

Exercice 5 - Matrices de Hilbert : le piège des flottants

Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i,j < n}$ et b la somme des colonnes, de sorte que la solution exacte de $H_n X = b$ est $X = (1, \dots, 1)$.

a) Le programme résout ce système en flottants (Gauss sans échange) et en fractions. L'erreur maximale en flottants vaut $1,3 \times 10^{-13}$ ($n = 4$), $2,5 \times 10^{-7}$ ($n = 8$), $8,7 \times 10^{-2}$ ($n = 12$) ; en fractions, on trouve exactement $(1, \dots, 1)$. Commenter.

b) Relier ce phénomène au déterminant de H_3 , qui vaut $\frac{1}{2160}$ (plaquette de déterminants).

c) On appelle conditionnement κ le facteur d'amplification des erreurs relatives ; pour H_{12} , $\kappa \approx 10^{16}$. Expliquer l'erreur observée.

d) Quelle conclusion pratique en tirer ?

Exercice 6 - Méthode de la puissance

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 3 et 1). On itère $y = Ax$, $\lambda = \max(|y_1|, |y_2|)$, $x \leftarrow \frac{y}{\lambda}$, depuis $x = (1, 0)$.

a) Écrire la boucle.

b) Le programme affiche $\lambda = 2 ; 2,5 ;$ puis $2,9756$ ($k = 5$), $2,99990$ ($k = 10$), $2,999999998$ ($k = 20$), et $x \rightarrow (1, 1)$. Calculer à la main les deux premières itérations.

c) Décomposer $(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1)$ et en déduire $A^k(1, 0)$; expliquer la vitesse $\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

d) Pourquoi cette méthode est-elle utilisée pour de très grandes matrices creuses ?

Exercice 7 - Méthode itérative de Jacobi

On résout $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ en itérant $x_{k+1} = \frac{1-y_k}{4}$, $y_{k+1} = \frac{2-2x_k}{5}$ depuis $(0, 0)$.

- a) Résoudre le système exactement.
- b) Écrire la boucle, arrêtée quand $|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| < 10^{-10}$; elle s'arrête après 21 itérations. Justifier la convergence : la diagonale domine.
- c) Montrer que l'erreur $e_k = (x_k - x^*, y_k - y^*)$ vérifie $e_{k+2} = \frac{1}{10}e_k$; en déduire le gain par itération.
- d) Quand préfère-t-on une méthode itérative au pivot de Gauss ?

Exercice 8 - Droite des moindres carrés

On dispose des points (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 6).

- a) Écrire un programme calculant $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$ et la somme des carrés des résidus.
- b) Le programme renvoie $a = 0,9$, $b = 1,3$ et une somme des carrés 1,9. Vérifier à la main.
- c) Montrer que (a, b) minimise $S(a, b) = \sum (y_i - ax_i - b)^2$ en annulant les dérivées partielles (équations normales).
- d) Prédire y pour $x = 6$ et commenter la fiabilité.

Exercice 9 - Puissances d'une matrice de transition

La météo suit la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ (ligne i : probabilités du lendemain sachant l'état i ; état 1 : beau, état 2 : pluie).

- a) Écrire une fonction $\text{prod}(A, B)$ et calculer P^2 , P^5 , P^{20} .
- b) Le programme donne $P^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$; interpréter le coefficient 0,72 et le vérifier.
- c) P^{20} a ses deux lignes égales à $\approx (0,666667; 0,333333)$: interpréter.
- d) Montrer que $\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ vérifie $\pi P = \pi$ et que P a pour valeurs propres 1 et 0,4 ; en déduire la vitesse de convergence.

Exercice 10 - Interpolation de Lagrange

- a) Écrire $\text{lagrange}(\text{points}, x)$ évaluant en x le polynôme d'interpolation $\sum_i y_i L_i(x)$, avec $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ (en fractions).
- b) Pour les points (1, 2), (2, 3), (3, 6), le programme renvoie 11 en $x = 4$, 3 en $x = 0$, et redonne 2, 3, 6 aux nœuds. Vérifier avec $P = X^2 - 2X + 3$.
- c) Combien d'opérations coûte une évaluation pour n points ?
- d) Pourquoi interpoler par un polynôme de haut degré sur des points équidistants est-il dangereux (phénomène de Runge) ?

Exercice 11 – Rotation répétée et dérive numérique

Soit R la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- Pourquoi $R^{12} = I_2$ mathématiquement ?
- Le programme calcule R^{12} en flottants par 12 produits successifs et obtient une erreur maximale de $1,1 \times 10^{-15}$ par rapport à I_2 . Commenter.
- On simule une rotation continue en appliquant 10^6 fois une rotation d'angle $\frac{2\pi}{10^6}$. Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur accumulée.
- Proposer deux remèdes.

Exercice 12 – Fibonacci : matrice exacte contre formule de Binet

- En réutilisant l'exponentiation rapide avec *prod*, calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100}$ et en extraire F_{100} .
- Le programme obtient $F_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075$ (entiers exacts), alors que `round(phi ** 100 / math.sqrt(5))` donne 354 224 848 179 263 111 168. Justifier la formule de Binet $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
- Expliquer l'écart de 1 196 093 entre les deux résultats.
- Combien de produits matriciels nécessite le calcul de F_{100} ?

Exercice 13 – Système tridiagonal : l'algorithme de Thomas

On résout $-y'' = 1$ sur $[0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$ (solution $y = \frac{x(1-x)}{2}$), avec $n = 9$ points intérieurs $x_i = ih$, $h = \frac{1}{10}$, par le schéma $-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = h^2$.

- Écrire le système : quelle est la forme de la matrice ?
- L'algorithme de Thomas (Gauss adapté aux matrices tridiagonales) est :

```
def thomas(n):
    h = 1 / (n + 1)
    a = [-1.0] * n
    b = [2.0] * n
    c = [-1.0] * n
    d = [h * h] * n
    for i in range(1, n):
        m = a[i] / b[i - 1]
        b[i] = b[i] - m * c[i - 1]
        d[i] = d[i] - m * d[i - 1]
    y = [0.0] * n
    y[n - 1] = d[n - 1] / b[n - 1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        v[i] = (d[i] - c[i] * y[i + 1]) / b[i]
    return y
```

Combien d'opérations coûte-t-il ?

- Le programme donne $y_1 = 0,045$, $y_2 = 0,08$, $y_5 = 0,125$, et un écart maximal $2,8 \times 10^{-17}$ avec la solution exacte. Vérifier y_5 .
- Expliquer pourquoi le schéma est **exact** ici (au arrondi près).

Exercice 14 – Coût du pivot et temps de calcul

On admet qu'un ordinateur effectue 10^9 opérations flottantes par seconde.

- Rappeler le coût du pivot de Gauss, $\approx \frac{2}{3}n^3$ opérations (additions et multiplications).
- Estimer le temps de résolution pour $n = 100, 1000, 10\,000$.
- Une simulation météo discrétise l'atmosphère en 10^8 inconnues : pourquoi le pivot de Gauss est-il hors de question ?
- Mémoire : une matrice pleine $n \times n$ de flottants (8 octets) occupe combien pour $n = 10^5$?

Exercice 15 – Synthèse : le classement PageRank

Quatre pages web 0, 1, 2, 3 ont les liens : $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0, 3 \rightarrow 2$. Un internaute clique un lien au hasard avec probabilité $d = 0,85$, et saute sur une page au hasard sinon. Le score r_j vérifie

$$r_j = \frac{1-d}{4} + d \sum_{i \rightarrow j} \frac{r_i}{\text{nombre de liens de } i}$$

- Écrire l'itération depuis $r = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ (100 tours).
- Le programme obtient $r \approx (0,3725; 0,1958; 0,3941; 0,0375)$, de somme 1. Pourquoi $r_3 = \frac{1-d}{4}$ exactement ?
- Vérifier l'équation de la page 1 avec les valeurs obtenues, et interpréter le classement.
- Relier cette méthode à la méthode de la puissance, et expliquer le rôle de $d < 1$.