

Plaque 3 - Analyse numérique : équations, intégrales, équations différentielles

Python et calcul scientifique — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un algorithme numérique se juge sur trois critères : il **converge**-t-il (et vers la bonne valeur) ? à quelle **vitesse** (linéaire : un nombre fixe de décimales par itération ; quadratique : le nombre de décimales double) ? est-il **stable** face aux arrondis ? On mesure l'ordre d'une méthode en regardant comment l'erreur est divisée quand on double le nombre de pas, et on confronte toujours le résultat à une valeur exacte connue.

Exercice 1 - Point fixe : résoudre $\cos x = x$

On résout $\cos x = x$ par l'itération $x_{n+1} = \cos x_n$, $x_0 = 1$.

- Écrire le programme, qui s'arrête quand $|\cos x - x| \leq 10^{-10}$ et affiche le nombre d'itérations.
- Le programme affiche 57 itérations et $x \approx 0,7390851332$. Justifier l'existence et l'unicité de la solution α dans $[0, 1]$.
- Montrer que l'erreur est multipliée à chaque pas par environ $|\sin \alpha| \approx 0,674$.
- En déduire le nombre de décimales gagnées par itération, et retrouver l'ordre de grandeur 57.

Exercice 2 - Newton : le nombre de décimales double

On applique la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 2$ depuis $x_0 = 1$.

- Écrire la relation de récurrence et le programme affichant x_k et l'erreur $|x_k - \sqrt{2}|$ pour $k = 1, \dots, 5$.
- Le programme affiche les erreurs 0,0858 ; 0,00245 ; $2,1 \times 10^{-6}$; $1,6 \times 10^{-12}$; 0. Commenter.
- Montrer que $x_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_k - \sqrt{2})^2}{2x_k}$.
- Pourquoi l'erreur affichée au rang 5 est-elle exactement 0 ?

Exercice 3 - Quand Newton diverge

On cherche la racine 0 de $f(x) = \arctan x$ par la méthode de Newton.

- Montrer que l'itération s'écrit $x_{n+1} = x_n - (1 + x_n^2) \arctan x_n$.
- Depuis $x_0 = 1$, le programme affiche $-0,5708$; $0,1169$; $-0,0011$; $0,0$. Depuis $x_0 = 1,5$: $-1,6941$; $2,3211$; $-5,1141$; $32,30$; $-1575,3$. Décrire les deux comportements.
- Expliquer géométriquement la divergence (tangente presque horizontale loin de 0).
- Proposer une stratégie robuste combinant dichotomie et Newton.

Exercice 4 – Milieu, trapèzes, Simpson

On approche $I = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ avec n sous-intervalles.

- Écrire les fonctions *milieu*, *trapezes* et *simpson* (n pair pour Simpson).
- Pour $n = 10$, les erreurs (approximation $-I$) sont $-7,16 \times 10^{-4}$, $1,43 \times 10^{-3}$ et $9,5 \times 10^{-7}$. Comparer les trois méthodes.
- Constater que l'erreur des trapèzes est environ -2 fois celle du point milieu, et en déduire que la combinaison $\frac{2M+T}{3}$ est bien meilleure. Qu'obtient-on ?
- Expliquer les signes des erreurs à l'aide de la convexité de $\exp$.

Exercice 5 – Mesurer l'ordre d'une méthode

Avec les fonctions de l'exercice précédent, on obtient pour $\int_0^1 e^x dx$:

n	milieu	trapèzes	Simpson
10	$-7,157 \times 10^{-4}$	$1,4317 \times 10^{-3}$	$9,535 \times 10^{-7}$
20	$-1,790 \times 10^{-4}$	$3,580 \times 10^{-4}$	$5,964 \times 10^{-8}$

- Calculer, pour chaque méthode, le rapport des erreurs entre $n = 10$ et $n = 20$.
- En déduire l'ordre p de chaque méthode (erreur $\approx Ch^p$).
- Quel n faudrait-il pour une erreur $\approx 10^{-10}$ avec les trapèzes ? avec Simpson ?
- Pourquoi ce contrôle empirique est-il indispensable pour valider un programme ?

Exercice 6 – Euler et Heun

Pour $y' = y$, $y(0) = 1$ sur $[0, 1]$, la méthode de Heun calcule $p = y_k + hy_k$ puis $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(y_k + p)$.

- Écrire *heun*(n).
- Le programme affiche les erreurs $4,20 \times 10^{-3}$ ($n = 10$) et $4,50 \times 10^{-5}$ ($n = 100$). Quel est l'ordre ? Comparer à Euler (erreurs 0,1245 et 0,01347).
- Montrer que, pour cette équation, $y_{k+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)y_k$; interpréter.
- Justifier l'équivalent de l'erreur $e - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n \sim \frac{e}{6n^2}$ et le vérifier pour $n = 100$.

Exercice 7 – Accélérer la série de Leibniz

On a $\frac{\pi}{4} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- Écrire *leibniz*(n) renvoyant $4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
- Le programme donne *leibniz*(1000) $\approx 3,1405927$, soit une erreur de $\approx 10^{-3}$. Justifier à l'aide du critère des séries alternées.
- La moyenne de deux sommes partielles consécutives, $\frac{S_{1000} + S_{1001}}{2}$, a une erreur de

$\approx 5 \times 10^{-7}$. Expliquer ce gain.

d) Combien de termes faudrait-il sans accélération pour une erreur de 10^{-7} ?

Exercice 8 – Calculer e avec une précision contrôlée

On calcule $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ en ajoutant les termes tant qu'ils dépassent 10^{-15} , chaque terme étant obtenu à partir du précédent.

a) Écrire le programme sans calculer de factorielle.

b) Il s'arrête après $k = 18$ avec une erreur de $4,4 \times 10^{-16}$. Justifier la majoration du reste $\sum_{k > n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!n}$.

c) En déduire combien de termes garantissent 15 décimales.

d) Pourquoi l'erreur finale ne descend-elle pas en dessous de $\approx 10^{-16}$?

Exercice 9 – Dérivée numérique : le bon pas

On approche $f'(0) = 1$ pour $f = \exp$ par $D_h = \frac{f(h) - f(0)}{h}$ et $C_h = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$.

a) Le programme donne les erreurs suivantes :

h	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}
$D_h - 1$	$5,0 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$-6,1 \times 10^{-9}$	$8,3 \times 10^{-8}$	$-8,0 \times 10^{-4}$
$C_h - 1$	$1,7 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-11}$	$-6,1 \times 10^{-9}$	$8,3 \times 10^{-8}$	$-8,0 \times 10^{-4}$

Décrire l'évolution des erreurs quand h diminue.

b) Justifier par Taylor que $D_h - 1 \approx \frac{h}{2}$ et $C_h - 1 \approx \frac{h^2}{6}$.

c) L'erreur d'arrondi est d'ordre $\frac{\varepsilon}{h}$ ($\varepsilon \approx 10^{-16}$). Trouver le pas optimal pour chaque formule.

d) Conclure : faut-il prendre h « le plus petit possible » ?

Exercice 10 – La suite $u(n+1) = \sqrt{2 + u(n)}$

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Montrer que (u_n) est croissante, majorée par 2, et converge vers 2.

b) Le programme affiche $2 - u_n$: 0,586 ($n = 1$), 0,152 ($n = 2$), $2,4 \times 10^{-3}$ ($n = 5$), $2,35 \times 10^{-6}$ ($n = 10$). Estimer le facteur de réduction de l'erreur par itération.

c) Justifier ce facteur par $g'(2)$ où $g(x) = \sqrt{2 + x}$.

d) Montrer que $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ et retrouver l'équivalent de $2 - u_n$.

Exercice 11 – Deux séries pour $\ln 2$

a) Montrer que $\ln 2 = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et que $\ln 2 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k2^k}$ (développer $-\ln(1-x)$ en $x = \frac{1}{2}$).

- b) Avec 10 termes, le programme donne les erreurs $-4,75 \times 10^{-2}$ et $-8,2 \times 10^{-5}$. Comparer.
- c) Majorer le reste de la seconde série après n termes par $\frac{1}{(n+1)2^n}$.
- d) Combien de termes faut-il pour 10^{-12} avec chaque série ?

Exercice 12 – Additionner des flottants

On exécute :

```
import math

s = 0.0
for k in range(10):
    s = s + 0.1
print(s, s == 1.0, math.fsum([0.1] * 10))
```

- a) Le programme affiche *0.9999999999999999 False 1.0*. Expliquer.
- b) L'erreur relative d'une addition est au plus $u \approx 1,1 \times 10^{-16}$. Majorer l'erreur accumulée en sommant n nombres positifs de somme S .
- c) Pourquoi vaut-il mieux additionner les petits termes en premier ?
- d) Que fait *math.fsum* ? Proposer un test d'égalité robuste.

Exercice 13 – Oscillateur : Euler n'est pas stable

Le système $x' = v$, $v' = -x$, $x(0) = 1$, $v(0) = 0$ a pour solution $x = \cos t$, $v = -\sin t$; l'énergie $E = x^2 + v^2$ vaut 1.

- a) Écrire une fonction appliquant Euler explicite avec le pas h sur $[0, T]$ et renvoyant l'énergie finale.
- b) Avec $h = 0,01$, le programme donne $E \approx 1,0648$ après une période ($T = 2\pi$) et $E \approx 1,874$ après dix. Montrer qu'un pas d'Euler multiplie E par $1 + h^2$.
- c) La variante « symplectique » (mettre à jour v , puis x avec la **nouvelle** valeur de v) donne $E \approx 1,00003$ après une période. Écrire ce schéma.
- d) Pourquoi la variante est-elle préférable pour simuler un mouvement périodique sur une longue durée ?

Exercice 14 – Monte-Carlo : deux estimateurs de π

Avec *random.seed(0)* et $n = 10^5$ tirages, on estime $\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ de deux façons :

- **(A)** « succès/échec » : $4 \times$ fréquence des points (x, y) tels que $y \leq \sqrt{1-x^2}$;
- **(B)** « valeur moyenne » : $4 \times$ moyenne de $\sqrt{1-x^2}$ pour x uniforme.

- a) Écrire les deux programmes.
- b) Ils affichent 3,14844 (A) et 3,14200 (B). Calculer les erreurs.
- c) La variance de l'estimateur A vaut $\frac{16p(1-p)}{n}$ avec $p = \frac{\pi}{4}$; celle de B vaut $\frac{16V(\sqrt{1-X^2})}{n}$, avec $V(\sqrt{1-X^2}) = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16} \approx 0,050$. Comparer les écarts types.

d) Pourquoi fixe-t-on la graine (*seed*) du générateur ?

Exercice 15 - Synthèse : trois méthodes pour $x = e^{-x}$

On résout $x = e^{-x}$ sur $[0, 1]$ (solution $\alpha \approx 0,567143$) à 10^{-12} près par dichotomie, par le point fixe $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ($x_0 = 0,5$), et par Newton sur $f(x) = x - e^{-x}$ ($x_0 = 0,5$).

- Écrire les trois boucles (chacune avec un compteur).
- Le programme compte 40, 45 et 3 itérations. Justifier le nombre 40 de la dichotomie.
- Justifier la convergence du point fixe et son facteur $\approx 0,567$; retrouver l'ordre de grandeur 45.
- Newton : écrire la récurrence et expliquer la rapidité. Laquelle des trois méthodes choisir, et pourquoi n'est-ce pas toujours Newton ?