

Plaquette 1 - Boucles, dichotomie, suites, intégration numérique et simulation

Python et calcul scientifique — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On déroule un programme à la main, on écrit les algorithmes classiques (**seuil**, **dichotomie**, **Newton**, **rectangles**, **Monte-Carlo**), et l'on compare le résultat numérique à la valeur exacte pour valider.

Exercice 1 - Dérouler une affectation

Que valent a et b après exécution ?

```
a = 5
b = 3
a = a + b
b = a - b
```

Exercice 2 - Dérouler une boucle for

Qu'affiche ce programme ?

```
s = 0
for k in range(1, 6):
    s = s + k * k
print(s)
```

Exercice 3 - Recherche de seuil

Écrire un programme déterminant le plus petit n tel que $1,05^n > 1000$, et donner la réponse.

Exercice 4 - Dichotomie

Écrire un programme de dichotomie pour résoudre $x^3 + x - 1 = 0$ à 10^{-3} près sur $[0; 1]$, et donner le résultat.

Exercice 5 - Méthode de Newton

Écrire un programme de Newton pour calculer $\sqrt{5}$, et donner les premières itérations depuis $x_0 = 2$.

Exercice 6 - Suite récurrente

Écrire un programme calculant u_{20} pour $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$, puis déterminer la limite.

Exercice 7 - Intégration par rectangles

Écrire un programme estimant $\int_0^1 x^2 dx$ par la méthode des rectangles à gauche avec n subdivisions, et comparer pour $n = 10$ et $n = 1000$.

Exercice 8 - Simulation de Monte-Carlo

Écrire un programme estimant π par tirages aléatoires dans le carré unité, et indiquer la précision attendue pour $n = 10^6$.

Exercice 9 - Boucle while et terminaison

Ce programme s'arrête-t-il ? Que calcule-t-il ?

```
n = 1
while 1 / n > 0.01:
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 10 - Calcul d'une somme

Écrire un programme calculant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et estimer sa valeur pour $n = 1000$.

Exercice 11 - Recherche d'un extremum

Écrire un programme trouvant le minimum de $f(x) = x^2 - 3x + 5$ sur $[0; 3]$ par balayage à pas 0,01, et comparer à la valeur exacte.

Exercice 12 - Comparaison de méthodes

Pour calculer $\int_0^1 e^x dx = e - 1$, comparer rectangles à gauche et trapèzes avec $n = 10$.

Exercice 13 - Méthode d'Euler pour $y' = y$

On approche la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$ sur $[0; 1]$ par la méthode d'Euler à n pas : $h = \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = y_k + h y_k$.

- Écrire une fonction `euler(n)` renvoyant l'approximation de $y(1)$.
- Montrer que le résultat vaut exactement $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; quelle valeur exacte approche-t-il ?
- Exécuté pour $n = 10, 100, 1000$, le programme affiche les erreurs 0,1245, 0,01347, 0,001358. Quel est l'ordre de la méthode ?
- Justifier l'équivalent de l'erreur $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$ par un développement limité.

Exercice 14 - Les flottants ne sont pas les réels

On exécute :

```
import math
```

```
print(0.1 + 0.2 == 0.3)
print(0.1 + 0.2)
x = 1e-8
print((1 - math.cos(x)) / x ** 2)
print(2 * math.sin(x / 2) ** 2 / x ** 2)
```

- a) Le programme affiche *False*, puis *0.30000000000000004*. Expliquer.
- b) Quelle est la limite mathématique de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ en 0 ?
- c) Le troisième affichage est *0.0*. Expliquer ce phénomène d'**annulation catastrophique**.
- d) Montrer que $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ et expliquer pourquoi le quatrième affichage donne bien *0.5*.

Exercice 15 - Synthèse : simulation d'une loi

Écrire un programme simulant 10^5 lancers de deux dés et estimant $\mathbb{P}(\text{somme} = 7)$, puis comparer à la valeur théorique.