

Plaquette 2 - Calculer des limites : formes indéterminées

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence.

- Croissances comparées ($\alpha, \beta > 0, q > 1$) : $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \rightarrow 0, \frac{n^\alpha}{q^n} \rightarrow 0, \frac{q^n}{n!} \rightarrow 0$.
- Limites usuelles, pour $x_n \rightarrow 0$ avec $x_n \neq 0$:

$$\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow 1 \quad \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \rightarrow 1 \quad \frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$$
- Puissance variable : $a_n^{b_n} = \exp(b_n \ln a_n)$, pour $a_n > 0$.
- Quantité conjuguée : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
- Encadrement : si $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $a_n, b_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$; si $|u_n - \ell| \leq v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Correction de l'exercice 1 - Un quotient de polynômes

Forme $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise numérateur et dénominateur par le terme dominant n^2 .

$$u_n = \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$$

- Les termes $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{5}{n^2}$ tendent vers 0 : $u_n \rightarrow \frac{3}{2}$.
- Règle : la limite d'un quotient de polynômes de même degré est le quotient des coefficients dominants.

Réponse. $\frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Différence de racines

Forme $\infty - \infty$: on multiplie par la quantité conjuguée.

$$u_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Pour v_n (forme $\infty \times 0$) : $v_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$, en divisant par $\sqrt{n}$.
- Donc $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- Les racines $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n}$ se rapprochent à la vitesse de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Réponse. $u_n \rightarrow 0 ; v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Puissances de 2 et de 3

Le terme dominant est 3^n : on divise numérateur et dénominateur par 3^n .

$$u_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

- Comme $\frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \frac{0+1}{1-0} = 1$.
- Retenir : entre deux suites géométriques de raisons positives, c'est celle de plus grande raison qui l'emporte.

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 4 - Croissances comparées

Toutes sont de la forme « puissance contre exponentielle » ou « logarithme contre puissance ».

- $a_n = \frac{n^2}{e^n} \rightarrow 0$: l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.
- $b_n = \frac{(\ln n)^3}{n^{1/2}} \rightarrow 0$: toute puissance de n l'emporte sur toute puissance de $\ln n$.
- $c_n \rightarrow 0$, bien que 1,01 soit proche de 1 :

$$\frac{n^q}{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (q > 1)$$

- Attention, la convergence peut être lente : c_n commence par devenir énorme ($c_{100} \approx 3,7 \times 10^{19}$) avant de décroître vers 0.

Réponse. Toutes tendent vers 0.

Correction de l'exercice 5 - La suite qui définit e

Forme 1^∞ : on passe à l'exponentielle.

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

- Avec $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, la limite usuelle donne $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow 1$.
- Par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow e^1 = e$.
- Piège : « $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ et $1^n = 1$ » est faux ; l'exposant tend aussi vers l'infini.

Réponse. $u_n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) \rightarrow e$.

Correction de l'exercice 6 - Une variante

Même méthode, avec $x_n = \frac{2}{n}$:

$$n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 2 \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

- Donc $u_n \rightarrow e^2$.
- Pour v_n : $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}$ avec $x_n = -\frac{1}{n}$, qui tend vers -1 . Donc $v_n \rightarrow e^{-1}$.
- Plus généralement, $(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$ pour tout réel a .

Réponse. e^2 ; e^{-1} .

Correction de l'exercice 7 - Le sinus de $1/n$

- $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ par la limite usuelle avec $x_n = \frac{1}{n}$.
- Pour v_n :

$$v_n = 2n^2 \sin^2 \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \right)^2$$

- en écrivant $2n^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}$. Le quotient tend vers 1, donc $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- Cela traduit $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ près de 0.

Réponse. $u_n \rightarrow 1$; $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Factorielle contre puissance

On écrit le quotient comme un produit de n facteurs :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}$$

- Chaque facteur est compris entre 0 et 1 ; en gardant le premier et en majorant les autres par 1 : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
- Par encadrement, $u_n \rightarrow 0$.
- Ainsi, n^n croît encore plus vite que $n!$, qui croît plus vite que toute suite géométrique.

Réponse. $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 9 - Une somme encadrée

On ne sait pas calculer la somme, mais on encadre chacun des n termes : pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

- En sommant les n termes : $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.
- Les deux bornes tendent vers 1 (quotients de polynômes de même degré) : par le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 1$.
- Méthode : on encadre le terme général par le plus petit et le plus grand terme, puis on multiplie par le nombre de termes.

Réponse. 1 (gendarmes).

Correction de l'exercice 10 - Dominer l'écart

Les numérateurs sont bornés mais n'ont pas de limite : on domine en valeur absolue.

$$|u_n| \leq \frac{|(-1)^n|}{n} + \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

- Le majorant tend vers 0, donc $u_n \rightarrow 0$.
- Principe : « borné $\times$ tend vers 0 » tend vers 0. On ne peut pas parler de « la limite de $(-1)^n$ » ou de « $\cos n$ », qui n'existent pas.

Réponse. 0 (domination par $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$).

Correction de l'exercice 11 - Différence de logarithmes

- $u_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \ln 1 = 0$ (continuité du logarithme).
- v_n est de la forme $\infty \times 0$:

$$v_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

- Interprétation : $\ln$ croît de moins en moins vite ; l'écart entre $\ln(n+1)$ et $\ln n$ est d'environ $\frac{1}{n}$.

Réponse. $u_n \rightarrow 0$; $v_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 12 - La racine n -ième de n

On passe à l'exponentielle :

$$u_n = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

- Par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow e^0 = 1$.
- Pour v_n : $\ln v_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n}$. Pour $n \geq 1$, $n^2+1 \leq 2n^2$, donc $0 \leq \ln v_n \leq \frac{\ln 2 + 2 \ln n}{n} \rightarrow 0$, et $v_n \rightarrow 1$.
- Toute suite qui croît « polynomialement » a une racine n -ième qui tend vers 1.

Réponse. $\ln u_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$; idem pour v_n .

Correction de l'exercice 13 - Le rapport de deux termes consécutifs

Pour $n \geq 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}$$

- Pour $n \geq 9$, ce rapport est $\leq \frac{1}{2}$. Donc, par récurrence, $0 < u_n \leq u_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-9}$ pour $n \geq 9$.
- Le majorant tend vers 0 : $u_n \rightarrow 0$.
- La suite commence par croître ($u_4 \approx 26$), puis s'effondre dès que $n+1 > 5$: ce n'est pas une suite monotone au début.

Réponse. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 9$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Vrai** : $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \rightarrow 0$.
- Faux** : $u_n = (-1)^n$ et $\ell = 1$; $|u_n| = 1$ mais (u_n) diverge. (C'est vrai si $\ell = 0$.)
- Faux** : $u_n = 1$ si n pair, 0 sinon ; $v_n = 1 - u_n$. Alors $u_n v_n = 0$, et aucune des deux ne tend vers 0.
- Vrai** : si $v_n \geq -M$, alors

$$u_n + v_n \geq u_n - M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois limites

a) On divise par n : $a_n = \frac{1 + \frac{\ln n}{n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$

b) $\ln b_n = \frac{\ln(n+1)}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $b_n \rightarrow 1.$

c) $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$; on passe à l'exponentielle :

$$n \ln \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = -\frac{2n}{n+1} \times \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)}{-\frac{2}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$$

— Donc $c_n \rightarrow e^{-2}.$

Réponse. a) 1 · b) 1 · c) $e^{-2}.$