

Plaquette 1 - Convergence, théorèmes de comparaison et suites récurrentes

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition.

$$u_n \rightarrow \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- La limite est **unique** ; toute suite convergente est **bornée**.
- **Opérations** : somme, produit, quotient (dénominateur de limite non nulle), passage à la limite dans les inégalités **larges**.

Théorèmes de comparaison.

- **Gendarmes** : $a_n \leq u_n \leq b_n$ avec $a_n, b_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$.
- **Domination** : $|u_n - \ell| \leq v_n$ avec $v_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$.
- **Divergence** : $u_n \geq v_n$ avec $v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$.

Limite monotone. Une suite **croissante majorée** converge (vers son sup) ; croissante non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Suites de référence.

- $q^n \rightarrow 0$ si $|q| < 1$; $\rightarrow +\infty$ si $q > 1$; divergente si $q \leq -1$.
- **Croissances comparées** : $\frac{\ln n}{n^\alpha} \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$) ; $\frac{n^\alpha}{q^n} \rightarrow 0$ ($q > 1$) ; $\frac{q^n}{n!} \rightarrow 0$.
- $n^{1/n} \rightarrow 1$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.

Suites particulières.

- **Arithmético-géométrique** $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) : point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$, puis $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$.
- **Récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$: si f **continue** et $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$. Si f est **croissante** et stabilise un intervalle, (u_n) est monotone.
- **Adjacentes** : (u_n) croît, (v_n) décroît, $v_n - u_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ même limite, avec $u_n \leq \ell \leq v_n$.
- **Bolzano-Weierstrass** : toute suite bornée admet une **sous-suite convergente**.

Correction de l'exercice 1 - Limite par quotient

On factorise par la **plus haute puissance** au numérateur et au dénominateur.

$$u_n = \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$$

- Les termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ tendent vers 0.
- Par quotient de limites (dénominateur de limite $2 \neq 0$) : $u_n \rightarrow \frac{3}{2} = 1,5$.
- **Contrôle numérique** : $u_{10} = \frac{291}{205} \approx 1,4195$; $u_{100} = \frac{29901}{20005} \approx 1,4947$ ✓

- **Règle** : pour un quotient de polynômes, la limite est le **quotient des coefficients dominants** quand les degrés sont égaux.

Réponse. $u_n \rightarrow \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Théorème des gendarmes

- **Encadrement du numérateur** : $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n + \cos n \leq n + 1$.
- **Encadrement de la suite** (le dénominateur est positif) :

$$\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+1} = 1$$

- **Limites des bornes** : $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$, et la borne de droite vaut 1.
- **Gendarmes** : $u_n \rightarrow 1$.
- **Contrôle** : $u_{100} = \frac{100 + \cos 100}{101} \approx \frac{100,86}{101} \approx 0,9986 \checkmark$
- **Réflexe** : face à $\cos n$ ou $\sin n$ (sans limite), on **encadre** plutôt que de chercher une limite au terme oscillant.

Réponse. $u_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 3 - Croissances comparées

- a) L'exponentielle **domine** toute puissance : $\frac{n^5}{2^n} \rightarrow 0$.
- b) Toute puissance positive domine le logarithme : $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$.
- c) La factorielle domine toute exponentielle : $\frac{3^n}{n!} \rightarrow 0$.
- **Justification de c)** : en notant $v_n = \frac{3^n}{n!}$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ dès que $n \geq 5$ — la suite décroît géométriquement.
- **Hiérarchie à retenir** : $\ln n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n!$ (pour $\alpha > 0$, $q > 1$).
- **Contrôles numériques** : $\frac{10^5}{2^{10}} \approx 97,7$ mais $\frac{20^5}{2^{20}} \approx 3,05$ et $\frac{50^5}{2^{50}} \approx 2,8 \times 10^{-7}$ — la décroissance finit toujours par l'emporter $\checkmark$

Réponse. Les trois limites valent 0.

Correction de l'exercice 4 - Suite monotone bornée

- a) **Récurrence.** $u_0 = 0 \leq 3 \checkmark$
 - Si $u_n \leq 3$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2} \leq \frac{6}{2} = 3 \checkmark$
 - b) **Croissance** : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 3}{2} - u_n = \frac{3 - u_n}{2} \geq 0$ d'après a).
 - (u_n) est **croissante et majorée** par 3 : elle **converge** vers un réel $\ell \leq 3$.
 - **Limite** : $f(x) = \frac{x+3}{2}$ est continue, donc $\ell = \frac{\ell+3}{2}$, soit $2\ell = \ell+3$ et $\ell = 3$.
 - **Forme explicite** (arithmético-géométrique) : $u_n - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (0 - 3)$, donc $u_n = 3 - 3 \times 2^{-n}$.
 - **Contrôle** : $u_1 = 1,5$, $u_2 = 2,25$, $u_3 = 2,625$ — et la formule donne $3 - 1,5 = 1,5 \checkmark$
- Réponse.** $u_n = 3 - 3 \times 2^{-n} \rightarrow 3$.

Correction de l'exercice 5 - Suite arithmético-géométrique

- **Point fixe** : $\ell = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{0,2} = 10$.
 - Or $u_0 = 10 = \ell$: la suite est **constante** égale à 10 !
 - **Vérification** : $0,8 \times 10 + 2 = 10$ ✓
 - **Cas général** : si $u_0 \neq 10$, on pose $v_n = u_n - 10$, qui vérifie $v_{n+1} = 0,8v_n$; alors

$$u_n = 10 + 0,8^n(u_0 - 10) \rightarrow 10$$
 - **Interprétation** : $\ell = 10$ est un **état d'équilibre attractif** ($|a| = 0,8 < 1$) ; toute condition initiale y converge géométriquement.
 - **Exemple** avec $u_0 = 0$: $u_n = 10 - 10 \times 0,8^n$, soit $u_1 = 2$, $u_2 = 3,6$, $u_{10} \approx 8,93$ ✓
- Réponse.** Suite constante égale à 10 ; en général $u_n = 10 + 0,8^n(u_0 - 10)$.

Correction de l'exercice 6 - Suite récurrente non monotone

- **Premiers termes** : $u_1 = \frac{6}{3} = 2$... la suite est **constante** ! Vérifions : $\frac{6}{1+2} = 2$ ✓
 - 2 est donc un **point fixe** de $f(x) = \frac{6}{1+x}$.
 - **Recherche des points fixes** : $x(1+x) = 6$ donne $x^2 + x - 6 = 0$, de racines 2 et -3.
 - **Avec une autre condition initiale**, par exemple $u_0 = 0$: $u_1 = 6$, $u_2 = \frac{6}{7} \approx 0,857$, $u_3 \approx 3,231$, $u_4 \approx 1,418$, $u_5 \approx 2,481$ — la suite **oscille** autour de 2 en s'en rapprochant.
 - **Explication** : f est **décroissante**, donc $f \circ f$ est croissante : les sous-suites paire et impaire sont **monotones** et convergent, ici vers la même limite 2.
 - **Vitesse** : $|f'(2)| = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1$ — la convergence est **géométrique** de raison $\frac{2}{3}$.
- Réponse.** Point fixe 2 ; convergence oscillante vers 2 pour tout $u_0 > -1$.

Correction de l'exercice 7 - Suites adjacentes

- (u_n) **croît** : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ ✓
- (v_n) **décroît** :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$
- ✓
- **Écart** : $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ✓
- Les suites sont donc **adjacentes** : elles convergent vers une **même limite** ℓ , avec $u_n \leq \ell \leq v_n$.
- **Encadrement pour** $n = 10$: $u_{10} \approx 1,549768$ et $v_{10} \approx 1,649768$, donc $\ell \in [1,5498 ; 1,6498]$.
- **Valeur** : $\ell = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934$ ✓ — bien dans l'encadrement.
- **Intérêt** : on obtient la convergence **et** un encadrement explicite, sans connaître la limite.

Réponse. Adjacentes ; la limite est $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$.

Correction de l'exercice 8 - Divergence

On utilise la **quantité conjuguée** pour lever la forme $\infty - \infty$.

$$u_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

- Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $u_n \rightarrow 0$.
- **Équivalent** : $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ — la convergence est **lente**.
- **Contrôle** : $u_{100} = \frac{1}{\sqrt{101} + 10} \approx 0,0499$, à comparer à $\frac{1}{20} = 0,05$ ✓
- **Conséquence** : la série $\sum u_n$ **diverge** (les sommes partielles valent $\sqrt{n+1} - 1 \rightarrow +\infty$), bien que le terme général tende vers 0.
- **Réflexe** : devant $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, multiplier par le conjugué est presque toujours la bonne première étape.

Réponse. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 9 - Suites extraites

- **Périodicité** : la suite est périodique de période 6, ses valeurs sont

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \dots$$
- **Deux sous-suites** : $u_{6n} = 1$ pour tout n (limite 1) et $u_{6n+3} = -1$ (limite -1).
- Deux sous-suites de limites **différentes** : la suite **diverge**.
- **Principe général** : si (u_n) converge vers ℓ , **toute** sous-suite converge vers ℓ . Exhiber deux sous-suites de limites distinctes réfute donc la convergence.
- **Valeurs d'adhérence** : ici $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ — quatre valeurs, alors qu'une suite convergente n'en a qu'une.
- **Bolzano-Weierstrass** : la suite étant bornée, elle admet bien des sous-suites convergentes — mais pas une limite unique.

Réponse. $u_{6n} = 1$ et $u_{6n+3} = -1$: divergence.

Correction de l'exercice 10 - Somme et gendarmes

- **Encadrement de chaque terme** : pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$.
- **Sommation** des n termes :

$$\frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

- Les bornes tendent vers $\frac{1}{2}$ et 1 : l'encadrement est **insuffisant** pour conclure !
- **Bonne méthode — somme de Riemann** : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$, donc

$$u_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0,693$$

- **Contrôle** : $u_{10} \approx 0,6688$ et $u_{100} \approx 0,6907$ ✓ — la valeur est bien dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, conformément à l'encadrement grossier.
- **Leçon** : un encadrement doit être **assez fin** ; sinon il faut changer d'outil (Riemann, équivalents, comparaison série-intégrale).

Réponse. $u_n \rightarrow \ln 2 \approx 0,693$ (somme de Riemann).

Correction de l'exercice 11 - Moyenne de Cesàro

Soit $\varepsilon > 0$; il existe N tel que $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour $k \geq N$.

— **Découpage** :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k - \ell| \leq \frac{C}{n} + \varepsilon$$

où C est la somme **fixe** des $N - 1$ premiers écarts.

— Pour n assez grand, $\frac{C}{n} \leq \varepsilon$, donc $|v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$: $v_n \rightarrow \ell$ ✓

— **Réciproque fausse** : $u_n = (-1)^n$ **diverge**, mais $v_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n} \rightarrow 0$.

— **Interprétation** : la moyenne **lisse** les oscillations. Elle conserve une limite existante, mais peut en créer une.

— **Application** : c'est la base de la sommation d'Abel et des méthodes de régularisation des séries divergentes.

Réponse. Cesàro : $v_n \rightarrow \ell$; réciproque fausse avec $(-1)^n$.

Correction de l'exercice 12 - Suite définie implicitement

Existence et unicité. Soit $f_n(x) = x^n + x - 1$, continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

— $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$: le TVI et la stricte monotonie donnent un **unique** $x_n \in]0 ; 1[$ ✓

Monotonie de la suite. Comparons $f_{n+1}(x_n)$ à 0 :

— $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$ (car $0 < x_n < 1$).

— Donc $x_{n+1} > x_n$ (f_{n+1} croissante et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$) : la suite est **croissante**, majorée par 1 — elle **converge** vers $\ell \leq 1$.

Limite. Supposons $\ell < 1$. Alors $x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$, donc en passant à la limite dans $x_n^n + x_n = 1$: $0 + \ell = 1$, soit $\ell = 1$ — contradiction.

— **Conclusion** : $\ell = 1$.

— **Contrôle** : $x_1 = 0,5$; $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$; $x_{10} \approx 0,835$; $x_{100} \approx 0,967$ ✓

Réponse. (x_n) est croissante et tend vers 1.

Correction de l'exercice 13 - Revenir à la définition

On calcule l'écart à la limite :

$$|u_n - 2| = \frac{2n+1-2n-6}{n+3} = \frac{5}{n+3}$$

— Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{5}{n+3} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{5}{\varepsilon} - 3$. On pose $N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$ (ou tout entier plus grand) : pour $n \geq N$, $|u_n - 2| \leq \varepsilon$.

— Application : $\varepsilon = 10^{-3}$ donne $n \geq 4997$; à partir de ce rang, u_n est à moins d'un millième de 2.

— Le rang N dépend de ε : c'est l'ordre « $\forall \varepsilon, \exists N$ » de la définition.

Réponse. $|u_n - 2| = \frac{5}{n+3}$; $N \geq \frac{5}{\varepsilon} - 3$, soit $n \geq 4997$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

Correction de l'exercice 14 - Une série géométrique

Somme géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \neq 1$:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

- Comme $\frac{1}{3} < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \rightarrow 0$ et $S_n \rightarrow \frac{3}{2}$.
- Écart : $\frac{3}{2} - S_n = \frac{3}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{1}{2 \times 3^n}$. On veut $2 \times 3^n > 10^4$, soit $3^n > 5\,000$: $3^7 = 2\,187$ ne suffit pas, $3^8 = 6\,561$ convient.
- Donc à partir de $n = 8$.

Réponse. $S_n = \frac{3}{2}(1 - 3^{-n-1}) \rightarrow \frac{3}{2}$; à partir de $n = 8$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : méthode de Héron

a) **Inégalité arithmético-géométrique** : pour $x > 0$,

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right) - \sqrt{a} = \frac{x^2 - 2\sqrt{a}x + a}{2x} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \geq 0$$

- Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$ dès que $u_n > 0$ — et la positivité se conserve ✓

b) **Décroissance** (pour $n \geq 1$) : $u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2 - a}{2u_n} \geq 0$ puisque $u_n \geq \sqrt{a}$.

- $(u_n)_{n \geq 1}$ est **décroissante et minorée** : elle converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$.
- ℓ est point fixe : $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$ donne $\ell^2 = a$, donc $\ell = \sqrt{a}$ ✓

Vitesse. L'égalité ci-dessus donne $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.

- **Application numérique** ($a = 2$, $u_0 = 2$) : $e_0 = 0,5858$, puis $e_1 \leq 0,1213$, $e_2 \leq 0,0052$, $e_3 \leq 9,6 \times 10^{-6}$.
- Les valeurs réelles sont $u_1 = 1,5$, $u_2 = 1,41667$, $u_3 = 1,414216$ — soit 6 décimales exactes en trois itérations.
- **Convergence quadratique** : le nombre de décimales **double** à chaque étape. C'est l'algorithme utilisé depuis l'Antiquité pour extraire des racines carrées.

Réponse. $u_n \rightarrow \sqrt{a}$ avec convergence quadratique ($u_3 \approx 1,414216$ pour $a = 2$).