

Plaquette 5 - Récurrences linéaires et modèles

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, équation $r^2 - ar - b = 0$.

- Deux racines réelles $r_1 \neq r_2$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Racine double r : $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.
- Racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$: $u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.
- λ et μ se déterminent avec u_0 et u_1 .

Arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) : avec le point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$,

$$u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$$

Correction de l'exercice 1 - Deux racines réelles

Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, soit $(r-2)(r-3) = 0$. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

- Conditions initiales : $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 4$, d'où $\mu = 2$ et $\lambda = -1$.

$$u_n = 2 \times 3^n - 2^n$$

- Vérification : $u_2 = 5 \times 4 - 6 \times 1 = 14$, et la formule donne $18 - 4 = 14$.
- Comportement : $u_n \sim 2 \times 3^n \rightarrow +\infty$; la racine de plus grand module impose la croissance.

Réponse. $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$.

Correction de l'exercice 2 - La formule de Binet

Équation $r^2 = r + 1$, de racines φ et ψ ; donc $F_n = \lambda \varphi^n + \mu \psi^n$. Avec $F_0 = 0$: $\mu = -\lambda$; avec $F_1 = 1$: $\lambda(\varphi - \psi) = 1$, et $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

- Comme $|\psi| \approx 0,618 < 1$, $\psi^n \rightarrow 0$. Alors

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n} = \varphi \frac{1 - (\psi/\varphi)^{n+1}}{1 - (\psi/\varphi)^n} \rightarrow \varphi$$

- Contrôle : $F_{11}/F_{10} = 89/55 \approx 1,6182$ et $\varphi \approx 1,6180$.

Réponse. $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$; $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.

Correction de l'exercice 3 - Une racine double

Équation $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$: racine double 2. Donc $u_n = (\lambda + \mu n)2^n$.

- $u_0 = \lambda = 1$; $u_1 = 2(\lambda + \mu) = 4$, donc $\mu = 1$.

$$u_n = (n+1)2^n$$

- Vérification : $u_2 = 16 - 4 = 12 = 3 \times 4$.

- Le facteur n est indispensable : avec seulement $\lambda 2^n$, on ne pourrait pas ajuster les deux conditions initiales.

Réponse. $u_n = (n+1)2^n$.

Correction de l'exercice 4 - Des racines complexes

- Termes : $0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \dots$: la suite est périodique de période 6.
- Équation $r^2 - r + 1 = 0$: racines $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$, de module 1. Donc $u_n = \lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}$.
- $u_0 = \lambda = 0$; $u_1 = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$, donc $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$$
- Vérification : $u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Des racines de module 1 donnent une suite bornée, périodique ici.

Réponse. $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$ (période 6).

Correction de l'exercice 5 - Rembourser un emprunt

- a) Chaque mois, le capital augmente de 1 % (multiplication par 1,01), puis on retire 500 €.
- b) Point fixe : $\ell = 1,01\ell - 500$, soit $\ell = 50\,000$. Donc

$$u_n - 50\,000 = 1,01^n(10\,000 - 50\,000) \Rightarrow u_n = 50\,000 - 40\,000 \times 1,01^n$$
- Le prêt est remboursé quand $u_n \leq 0$: $1,01^n \geq 1,25$, soit $n \geq \frac{\ln 1,25}{\ln 1,01} \approx 22,4$.
- Après 22 mois, il reste environ 211 € : il faut une 23^e mensualité (partielle). Au total, on paie environ 11 213 €.

Réponse. $u_n = 50\,000 - 40\,000 \cdot 1,01^n$; 23 mois.

Correction de l'exercice 6 - Une suite homographique

Les points fixes de $x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$ sont ± 1 ; on admet $u_n \geq 0$ (récurrence). Calcul :

$$v_{n+1} = \frac{(2u_n + 1) - (u_n + 2)}{(2u_n + 1) + (u_n + 2)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n + 1)} = \frac{v_n}{3}$$

- (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, avec $v_0 = -1$: $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$.
- De $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$, on tire $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \rightarrow 1$.
- Contrôle : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Réponse. $v_n = -3^{-n}$; $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 7 - Une somme télescopique

On décompose : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme se télescope :

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- Donc $S_n \rightarrow 1$.
- Contrôle : $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$.
- Cette somme a servi à majorer $\sum \frac{1}{k^2}$ par 2.

Réponse. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 8 - Une somme de n termes

- Passer de u_n à u_{n+1} ajoute $\frac{1}{2n+1}$ et $\frac{1}{2n+2}$ et retire $\frac{1}{n+1}$:
- $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$
- Majoration : u_n a n termes, chacun $\leq \frac{1}{n+1}$, donc $u_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$.
 - Croissante et majorée : (u_n) converge (sa limite est $\ln 2$, par comparaison avec une intégrale).
 - Contrôle : $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \approx 0,583$.

Réponse. Croissante, majorée par 1 : convergente.

Correction de l'exercice 9 - Franchir un seuil

La suite est croissante (terme dominant 2×3^n). On encadre d'abord : $u_n \leq 2 \times 3^n$ et $u_n \geq 3^n$ (car $2^n \leq 3^n$).

- $u_n > 10^6$ impose $2 \times 3^n > 10^6$, soit $n > \frac{\ln(5 \times 10^5)}{\ln 3} \approx 11,9$, donc $n \geq 12$.
 - On vérifie :
- $$u_{11} = 2 \times 177\,147 - 2\,048 = 352\,246 \quad u_{12} = 2 \times 531\,441 - 4\,096 = 1\,058\,786$$
- Le plus petit rang est $n = 12$. Un calcul d'ordre de grandeur, suivi d'une vérification exacte, évite de calculer tous les termes.

Réponse. $n = 12$.

Correction de l'exercice 10 - Une suite géométrique complexe

$$z_n = q^n \text{ avec } q = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}.$$

$$|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Donc $z_n \rightarrow 0$.
- À chaque étape, le point tourne de $\frac{\pi}{4}$ autour de l'origine et sa distance à O est multipliée par $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$: les points décrivent une **spirale** qui s'enroule vers 0.
- Une suite géométrique complexe converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$.

Réponse. $|z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \rightarrow 0$; spirale.

Correction de l'exercice 11 - Une dilution

a) Il reste 900 L à la concentration c_n , soit $900c_n$ grammes, plus $100 \times 5 = 500$ g :

$$c_{n+1} = \frac{900c_n + 500}{1\,000}.$$

b) Point fixe : $\ell = 0,9\ell + 0,5$, soit $\ell = 5$. Avec $c_0 = 0$:

$$c_n = 5(1 - 0,9^n)$$

- $c_n > 4,5 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,9} \approx 21,9$: il faut 22 heures ($c_{22} \approx 4,51$ g/L).
- La concentration tend vers 5 g/L, celle de la solution ajoutée, sans jamais l'atteindre.

Réponse. $c_n = 5(1 - 0,9^n)$; 22 heures.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver les carrés

- **Par télescope** : $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$.

$$u_n = 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$$

- **Par récurrence** : si $u_n = n^2$, alors $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
- On retrouve que la somme des n premiers impairs vaut n^2 .

Réponse. $u_n = n^2$.

Correction de l'exercice 13 - Vitesses de convergence

- $\frac{1}{n} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 10^6$: plus d'un million de termes.
- $\frac{1}{2^n} < 10^{-6} \Leftrightarrow 2^n > 10^6$; $2^{20} = 1\,048\,576$: à partir de $n = 20$.
- $\frac{1}{n!} < 10^{-6}$: $9! = 362\,880$ et $10! = 3\,628\,800$: à partir de $n = 10$.

$$\frac{1}{n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n!} \quad (\text{en vitesse de convergence vers } 0)$$

- C'est pourquoi la série $\sum \frac{1}{k!}$ (qui donne e) est bien plus efficace que la série harmonique alternée (qui donne $\ln 2$).

Réponse. $n > 10^6$; $n \geq 20$; $n \geq 10$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : avec $u_0 = 1$, $u_1 = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on obtient $u_n = \psi^n \rightarrow 0$ (le coefficient de φ^n est nul).
- Vrai** : $|u_n| \leq |\lambda||r_1|^n + |\mu||r_2|^n \rightarrow 0$ (et de même dans le cas d'une racine double, car $n|r|^n \rightarrow 0$).
- Vrai** :

$$u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Faux** : $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$; le terme en nr^n est nécessaire.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la moyenne des deux précédents

- $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{4}$, $u_4 = \frac{5}{8}$: les termes oscillent autour d'une valeur proche de 0,67.
- Équation $r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = 0$, de racines 1 et $-\frac{1}{2}$: $u_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Avec $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \frac{\mu}{2} = 1$:

$$u_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

c) $u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$: cette quantité vaut toujours $u_1 + \frac{1}{2}u_0 = 1$. À la limite, $\ell + \frac{1}{2}\ell = 1$, donc $\ell = \frac{2}{3}$.

Réponse. a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ · b) $u_n = \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) \rightarrow \frac{2}{3}$.