

Plaquette 4 - Suites adjacentes, suites extraites

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suites adjacentes. Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$, alors elles convergent vers une même limite ℓ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

Suites extraites.

- Si $u_n \rightarrow \ell$, toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ .
- Si deux suites extraites ont des limites différentes, (u_n) diverge.
- Si $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.
- **Bolzano-Weierstrass** : toute suite réelle bornée a une suite extraite convergente ; les limites des suites extraites s'appellent les **valeurs d'adhérence**.

Correction de l'exercice 1 - Dichotomie pour $\sqrt{2}$

a) $m_0 = 1,5$, $2,25 > 2$: $[a_1; b_1] = [1; 1,5]$. $m_1 = 1,25$, $1,5625 \leq 2$: $[1,25; 1,5]$.
 $m_2 = 1,375$, $1,890... \leq 2$: $[1,375; 1,5]$. $m_3 = 1,4375$, $2,066 > 2$:
 $[a_4; b_4] = [1,375; 1,4375]$.

b) Par construction, (a_n) croît, (b_n) décroît, et la longueur est divisée par 2 à chaque étape :

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Elles sont adjacentes, de limite commune ℓ . On a aussi $a_n^2 \leq 2 < b_n^2$ à chaque rang (récurrence), d'où à la limite $\ell^2 \leq 2 \leq \ell^2$: $\ell = \sqrt{2}$.

Réponse. $[a_4; b_4] = [1,375; 1,4375]$; adjacentes, limite $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2 - La constante d'Euler

- $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$, car avec $x = \frac{1}{n}$, $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$.
- $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$, car $\ln(1+x) \leq x$.
- Enfin :

$$a_n - b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Les suites sont adjacentes : elles convergent vers une même limite $\gamma \approx 0,5772$ (constante d'Euler), ce qui montre que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Réponse. (a_n) décroît, (b_n) croît, $a_n - b_n \rightarrow 0$; limite γ .

Correction de l'exercice 3 - La série harmonique alternée

- $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$: (S_{2n}) est croissante.
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$: (S_{2n+1}) est décroissante.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Elles sont adjacentes, de même limite ℓ . Les deux extraites paire et impaire ayant la même limite, $S_n \rightarrow \ell$ (on montre que $\ell = \ln 2$).
- Encadrement : $S_2 = 0,5 \leq \ell \leq S_3 \approx 0,833$.

Réponse. Adjacentes ; (S_n) converge (vers $\ln 2$).

Correction de l'exercice 4 - La moyenne arithmético-géométrique

- Par récurrence, $a_n, b_n > 0$ et, par l'inégalité des moyennes,
 $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$. Donc $b_n \leq a_n$ pour tout n .
- $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n$: (a_n) décroît. $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n$: (b_n) croît.
- Écart :

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

- donc $a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0) \rightarrow 0$. Les suites sont adjacentes ; leur limite commune ($\approx 1,4568$) est la moyenne arithmético-géométrique de 2 et 1. La convergence est en fait extrêmement rapide.

Réponse. $b_n \leq a_n$, (a_n) décroît, (b_n) croît, écart divisé par au moins 2.

Correction de l'exercice 5 - Deux suites définies ensemble

- $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{v_n - u_n}{6}$, donc $v_n - u_n = \frac{1}{6^n} > 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} < 0$: adjacentes, puisque $v_n - u_n \rightarrow 0$.
- $2u_{n+1} + 3v_{n+1} = (u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 2u_n + 3v_n$: la quantité vaut toujours $2 \times 0 + 3 \times 1 = 3$. À la limite :

$$2\ell + 3\ell = 3 = \ell = \frac{3}{5}$$

Réponse. a) $\frac{v_n - u_n}{6}$ · c) limite $\frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 6 - Divergence par les extraites

On exhibe deux suites extraites de limites différentes.

- $u_{2n} = 1 \rightarrow 1$ et $u_{2n+1} = -1 \rightarrow -1$: (u_n) diverge.
- Pour (v_n) : avec $n = 6k$, $v_{6k} = \cos(2k\pi) = 1$; avec $n = 6k + 3$:

$$v_{6k+3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$$

- Deux extraites de limites 1 et -1 : (v_n) diverge.
- Les indices extraits $\varphi(n) = 6n$ et $\varphi(n) = 6n + 3$ sont bien strictement croissants.

Réponse. Extraites de limites 1 et -1 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 7 - Paires et impaires suffisent

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_1$, et N_2 tel que $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_2$.

- On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $m \geq N$:
- si $m = 2n$ est pair, $n \geq N_1$; si $m = 2n + 1$ est impair, $n \geq N_2$.

$$\forall m \geq N, |u_m - \ell| \leq \varepsilon$$

- Donc $u_n \rightarrow \ell$. Le résultat reste vrai pour toute famille finie d'extraites dont les indices recouvrent $\mathbb{N}$ (par exemple $u_{3n}, u_{3n+1}, u_{3n+2}$).

Réponse. $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ convient.

Correction de l'exercice 8 - Trois extraites

Notons a, b, c les limites respectives.

- (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) (indices $2 \times 3n$) et de (u_{3n}) (indices $3 \times 2n$) : elle tend vers a et vers c , donc $a = c$.
- (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) ($6n+3 = 2(3n+1) + 1$) et de (u_{3n}) ($6n+3 = 3(2n+1)$) : donc $b = c$.

$$a = c = b$$

- Les extraites paire et impaire ont la même limite : (u_n) converge.
- Sans (u_{3n}) , rien ne relie a et b : $(-1)^n$ a des extraites paire et impaire convergentes.

Réponse. (u_{6n}) et (u_{6n+3}) relient les limites : $a = b = c$.

Correction de l'exercice 9 - Valeurs d'adhérence

- $u_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \rightarrow 1$ et $u_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow -1$. Toute extraite convergente a une infinité d'indices pairs ou impairs, donc sa limite est 1 ou -1 : valeurs d'adhérence $\{-1; 1\}$.
- Pour $v_n : \sin \frac{n\pi}{2}$ vaut $0, 1, 0, -1$ selon n modulo 4, et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$:

$$v_{4k} \rightarrow 0 \quad v_{4k+1} \rightarrow 1 \quad v_{4k+2} \rightarrow 0 \quad v_{4k+3} \rightarrow -1$$

- Valeurs d'adhérence : $\{-1; 0; 1\}$. Une suite bornée qui a plusieurs valeurs d'adhérence diverge.

Réponse. $\{-1; 1\} ; \{-1; 0; 1\}$.

Correction de l'exercice 10 - Une extraite ne suffit pas

a) $\varphi(n) = n^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$: (u_{n^2}) est extraite, et toute extraite d'une suite convergente a la même limite. Directement : si $|u_m - \ell| \leq \varepsilon$ pour $m \geq N$, alors pour $n \geq N$, $n^2 \geq N$ et

$$|u_{n^2} - \ell| \leq \varepsilon$$

- b) $u_n = 1$ si n est un carré parfait, 0 sinon. Alors $u_{n^2} = 1$ pour tout n , mais (u_n) prend une infinité de fois les valeurs 0 et 1 : elle diverge.
- La convergence d'une extraite ne dit rien sur la suite entière, sauf si les extraites « recouvrent » tous les indices.

Réponse. a) extraite · b) indicatrice des carrés parfaits.

Correction de l'exercice 11 - Encadrer à chaque rang

Des suites adjacentes encadrent leur limite : (u_{2n+1}) croissante, (u_{2n}) décroissante, donc

$$u_5 \leq \frac{\pi}{4} \leq u_4$$

- $u_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \approx 0,8349$ et $u_5 = u_4 - \frac{1}{11} \approx 0,7440$.
- En multipliant par 4 : $2,976 \leq \pi \leq 3,340$.
- La convergence est très lente : l'écart $u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{4n+3}$ ne décroît que comme $\frac{1}{n}$.

Réponse. $2,976 \leq \pi \leq 3,340$.

Correction de l'exercice 12 - Adjacentes : le cas des inégalités strictes

— (u_n) est croissante et converge vers ℓ : pour tout $m \geq n + 1$, $u_{n+1} \leq u_m$; en passant à la limite en m , $u_{n+1} \leq \ell$.

— Comme la suite est strictement croissante :

$$u_n < u_{n+1} \leq \ell$$

— De même, $\ell \leq v_{n+1} < v_n$.

— Ces inégalités strictes sont la clé de l'irrationalité de e (synthèse) : on a besoin que la limite soit **strictement** entre deux termes.

Réponse. $u_n < u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} < v_n$.

Correction de l'exercice 13 - Bolzano-Weierstrass en action

Par l'absurde, supposons que u_n ne tende pas vers ℓ :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

— On construit ainsi des indices $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$ avec $|u_{\varphi(k)} - \ell| > \varepsilon$.

— La suite $(u_{\varphi(k)})$ est bornée : par Bolzano-Weierstrass, elle a une extraite convergente, de limite ℓ' avec $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$ (passage à la limite dans l'inégalité).

— ℓ' est une valeur d'adhérence de (u_n) différente de ℓ : contradiction.

— L'hypothèse « bornée » est indispensable : $u_n = n$ si n impair, 0 sinon, n'a que 0 comme valeur d'adhérence et diverge.

Réponse. Sinon, une extraite reste à distance ε de ℓ , et Bolzano-Weierstrass donne une autre valeur d'adhérence.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

a) **Vrai** : c'est le théorème des suites adjacentes.

b) **Faux** : il manque $v_n - u_n \rightarrow 0$. Exemple : $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ convergent vers 0 et 1.

c) **Faux** : $(-1)^n$ est bornée et diverge. Bolzano-Weierstrass donne seulement une **extraite** convergente.

d) **Faux** : $u_{2n} = 0$, $u_{2n+1} = n$; alors

$$u_{2n} \rightarrow 0 \quad \text{mais} \quad u_{2n+1} \rightarrow +\infty$$

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : e est irrationnel

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Pour v :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

— et $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rightarrow 0$: adjacentes, strictement monotones, donc $u_q < e < v_q$.

— b) $q \cdot q! u_q = q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$ est un entier N (chaque $\frac{q!}{k!}$ est entier), et $q \cdot q! v_q = N + 1$. En multipliant l'encadrement par $q \cdot q! > 0$: $N < q \cdot q! e < N + 1$.

— Or $q \cdot q! \cdot \frac{p}{q} = p \cdot q!$ est un entier : un entier strictement entre deux entiers consécutifs, contradiction. Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Réponse. a) adjacentes · b) un entier coincé entre N et $N + 1$: e irrationnel.