

Plaquette 3 - Suites récurrentes du type $u(n+1) = f(u(n))$

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$, f continue sur un intervalle stable I .

— Si $u_n \rightarrow \ell \in I$, alors, par continuité :

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell)$$

— f croissante sur I : si $u_0 \leq u_1$, la suite est croissante ; si $u_0 \geq u_1$, décroissante (récurrence : $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$).

— Le signe de $f(x) - x$ sur I donne directement le sens de variation :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

— f décroissante : $f \circ f$ est croissante, et (u_{2n}) , (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

— Contraction : si $|f'| \leq k < 1$ sur I , alors $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice 1 - Une racine qui se stabilise

On pose $f(x) = \sqrt{x+6}$, continue et croissante sur $[0; +\infty[$.

— **Intervalle stable** : $f(0) = \sqrt{6} \approx 2,45$ et $f(3) = 3$; f étant croissante, $f([0; 3]) \subset [\sqrt{6}; 3] \subset [0; 3]$. Donc $u_n \in [0; 3]$ pour tout n .

— **Monotonie** : $u_1 = \sqrt{7} \approx 2,65 > u_0$ et f croissante : la suite est croissante.

— **Conclusion** : croissante et majorée par 3, elle converge vers $\ell \in [1; 3]$ avec $f(\ell) = \ell$:

$$\sqrt{\ell+6} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 6 = 0 \text{ et } \ell \geq 0 \Leftrightarrow \ell = 3$$

— (l'autre racine, -2 , est négative). Donc $u_n \rightarrow 3$.

Réponse. Croissante, majorée par 3 ; limite 3.

Correction de l'exercice 2 - Le carré itéré

Par récurrence, $u_n = u_0^{2^n}$.

— Si $0 \leq u_0 < 1$: $u_n = u_0^{2^n} \rightarrow 0$, car $2^n \rightarrow +\infty$ et $0 \leq u_0 < 1$.

— Si $u_0 = 1$: la suite est constante égale à 1 (point fixe).

— Si $u_0 > 1$: $u_n \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$$

— Les deux points fixes jouent des rôles opposés : 0 « attire » les suites qui partent de $[0; 1[$, 1 « repousse » tout point voisin (seule la suite constante y converge).

Réponse. $u_0 < 1 : 0 \cdot u_0 = 1 : 1 \cdot u_0 > 1 : +\infty$.

Correction de l'exercice 3 - Une suite décroissante vers 0

— **Stabilité** : si $x \in [0; 1]$, alors $x - x^2 = x(1 - x) \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \subset [0; 1]$. Donc tous les u_n sont dans $[0; 1]$.

— **Monotonie** : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$: la suite est décroissante.

— Décroissante et minorée par 0, elle converge vers un $\ell \in [0; 1]$ tel que

$$\ell = \ell - \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

- La convergence est lente : $u_1 = 0,25$, $u_2 = 0,1875$, $u_3 \approx 0,152$; on peut montrer que u_n est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Réponse. Décroissante, minorée par 0, limite 0.

Correction de l'exercice 4 - Discuter selon le premier terme

$f(x) = \frac{x^2+2}{3}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et

$$f(x) - x = \frac{x^2 - 3x + 2}{3} = \frac{(x-1)(x-2)}{3}$$

- Points fixes : 1 et 2. Signe de $f(x) - x$: positif sur $[0; 1]$, négatif sur $[1; 2]$, positif au-delà de 2.
- $u_0 = 0$: $[0; 1]$ est stable ($f(0) = \frac{2}{3}$, $f(1) = 1$), et $f(x) \geq x$: suite croissante, majorée par 1, limite 1.
- $u_0 = \frac{3}{2}$: $[1; 2]$ est stable, $f(x) \leq x$: suite décroissante, minorée par 1, limite 1.
- $u_0 = 3$: $[2; +\infty[$ est stable et $f(x) > x$ pour $x > 2$: la suite croît ; elle ne peut converger que vers un point fixe ≥ 3 , il n'y en a pas : $u_n \rightarrow +\infty$.

Réponse. $u_0 = 0$ et $\frac{3}{2}$: limite 1 ; $u_0 = 3$: $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 - Le cosinus itéré

- $\cos$ est décroissante sur $[0; 1]$: $\cos([0; 1]) = [\cos 1; 1] \subset [0; 1]$ ($\cos 1 \approx 0,54$).
- $g(x) = \cos x - x$ est continue, strictement décroissante, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$: une unique solution ℓ (TVI et stricte monotonie).
- Par l'inégalité des accroissements finis, avec $|\cos'| = |\sin| \leq \sin 1$ sur $[0; 1]$:

$$|u_{n+1} - \ell| = |\cos u_n - \cos \ell| \leq \sin(1) |u_n - \ell|$$

- Par récurrence, $|u_n - \ell| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0$, car $\sin 1 \approx 0,84 < 1$. Donc $u_n \rightarrow \ell \approx 0,739$.

Réponse. Contraction de rapport $\sin 1 < 1$; limite $\ell \approx 0,739$.

Correction de l'exercice 6 - Deviner puis démontrer

- $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$. Conjecture : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

- Récurrence : vrai pour $n = 0$. Si $u_n = \frac{n}{n+1}$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1) - n} = \frac{n+1}{n+2}$$

- Donc $u_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$.

- Vérification : 1 est bien l'unique point fixe de $x \mapsto \frac{1}{2-x}$ ($x(2-x) = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$).
Point fixe double : la convergence est lente, en $\frac{1}{n}$.

Réponse. $u_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 7 - Une fonction décroissante

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et $f \circ f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ est croissante.

- $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{5}$. Comme $u_2 < u_0$ et $f \circ f$ est croissante, (u_{2n}) est décroissante ; comme $u_3 > u_1$, (u_{2n+1}) est croissante. Toutes deux sont dans $[0; 1]$: elles convergent.
- Leurs limites sont des points fixes de $f \circ f$:

$$\frac{1+\ell}{2+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\ell \geq 0)$$

- Les deux suites extraites ont la même limite, donc $u_n \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. (Les termes sont des quotients de nombres de Fibonacci.)

Réponse. (u_{2n}) décroît, (u_{2n+1}) croît ; limite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Le logarithme itéré

- **Positivité** : si $u_n > 0$, alors $1 + u_n > 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) > 0$. Par récurrence, $u_n > 0$.
- **Monotonie** : pour $x > 0$, $\ln(1 + x) < x$ (la courbe est sous sa tangente en 0), donc $u_{n+1} < u_n$.
- Décroissante et minorée par 0, la suite converge vers $\ell \geq 0$ vérifiant

$$\ln(1 + \ell) = \ell$$

- La fonction $x \mapsto x - \ln(1 + x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0 : l'unique solution est $\ell = 0$. Donc $u_n \rightarrow 0$.

Réponse. Positive, décroissante ($\ln(1 + x) < x$) ; limite 0.

Correction de l'exercice 9 - Une suite qui s'échappe

- Par récurrence, $u_n \geq 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$: la suite est croissante.
- **Par l'absurde**, si elle convergeait vers ℓ (avec $\ell \geq 1$), la continuité de $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ donnerait

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{\ell} = 0$$

- ce qui est impossible. Une suite croissante qui ne converge pas tend vers $+\infty$.
- Plus précisément, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq u_n^2 + 2$, donc $u_n^2 \geq 1 + 2n$ et $u_n \geq \sqrt{2n+1}$.

Réponse. Croissante sans point fixe : $+\infty$ (et $u_n \geq \sqrt{2n+1}$).

Correction de l'exercice 10 - La suite logistique

$f(x) = 2x(1 - x)$ a pour dérivée $2 - 4x \geq 0$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: f y est croissante, avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. L'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ est donc stable.

$$f(x) - x = x - 2x^2 = x(1 - 2x) \geq 0 \text{ sur } \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

- La suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$: elle converge vers un point fixe de $\left[0, 1; \frac{1}{2}\right]$.
- Points fixes : 0 et $\frac{1}{2}$; comme $u_n \geq 0,1$, la limite est $\frac{1}{2}$.
- Premiers termes : 0,1 ; 0,18 ; 0,2952 ; 0,416 ; 0,486...

Réponse. Croissante, majorée par $\frac{1}{2}$; limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - La racine du double

- $f(x) = \sqrt{2x}$ est croissante ; $[1; 2]$ est stable ($f(1) = \sqrt{2}$, $f(2) = 2$) ; et $f(x) \geq x \Leftrightarrow 2x \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq 2$ sur $[0; 2]$. La suite est croissante, majorée par 2 : elle converge vers un point fixe non nul, 2.
- Formule : on pose $v_n = \ln u_n$; alors $v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln 2 + v_n)$, suite arithmético-géométrique de point fixe $\ln 2$:

$$v_n - \ln 2 = \frac{1}{2^n}(v_0 - \ln 2) \Rightarrow u_n = 2^{1-2^{-n}}$$

- On retrouve $u_n \rightarrow 2^1 = 2$; par exemple $u_1 = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.

Réponse. Limite 2 ; $u_n = 2^{1-2^{-n}}$.

Correction de l'exercice 12 - Le signe de $f(x) - x$

Pour tout $n : u_n \in I$ (stabilité), donc

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$$

- La suite est croissante (ici la croissance de f n'est même pas utile).
- Application : $f(x) = x + e^{-x}$, et $f(x) - x = e^{-x} > 0$: la suite est strictement croissante. Elle n'a pas de point fixe ($e^{-\ell} = 0$ est impossible), donc elle tend vers $+\infty$.
- On montre même, comme pour $u_n + \frac{1}{u_n}$, qu'elle croît lentement (de l'ordre de $\ln n$).

Réponse. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$; application : $+\infty$.

Correction de l'exercice 13 - Le sinus itéré

- **Stabilité** : $\sin$ envoie $]0; 1]$ dans $]0; \sin 1] \subset]0; 1]$ (car $0 < \sin x \leq x \leq 1$ pour $x \in]0; 1]$). Par récurrence, $u_n \in]0; 1]$.
- **Monotonie** : pour $x > 0$, $\sin x < x$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est décroissante.
- Décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\ell \in [0; 1]$ avec, par continuité du sinus :

$$\sin \ell = \ell$$

- La fonction $x \mapsto x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x > 0$ sur $]0; 1]$: elle est strictement croissante et nulle en 0, donc $\ell = 0$.
- Convergence lente : $u_{10} \approx 0,46$; on peut montrer que u_n est de l'ordre de $\sqrt{3/n}$.

Réponse. Décroissante, minorée par 0 ; limite 0.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux ?

- Faux** : f croissante rend (u_n) monotone, mais le sens dépend de $u_1 - u_0$ ($u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$, $u_0 = 1$: décroissante).
- Vrai** (à condition que ℓ soit dans le domaine de continuité) : on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Faux** : $u_{n+1} = u_n^2$ avec $u_0 = 2$ tend vers $+\infty$, alors que f a les points fixes 0 et 1.
- Faux** : si u_0 est un point fixe, la suite est constante, donc monotone. En général, les suites extraites paires et impaires sont monotones de sens contraires.

$$u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$$

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une discussion complète

- a) $\frac{x^2+1}{2} - x = \frac{x^2-2x+1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2} \geq 0$: pour tout u_0 , la suite est **croissante**. Son unique point fixe est 1.
- b) Remarquons que $u_1 = \frac{u_0^2+1}{2}$ ne dépend que de $|u_0|$.
- Si $|u_0| \leq 1$: $u_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $[0; 1]$ est stable (f croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(1) = 1$). La suite, croissante et majorée par 1 à partir du rang 1, converge vers le point fixe 1.
- Si $|u_0| > 1$: $u_1 > 1$, puis la suite croît ; une limite finie serait un point fixe $\geq u_1 > 1$, il n'y en a pas :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Réponse. a) croissante · b) $|u_0| \leq 1$: limite 1 ; $|u_0| > 1$: $+\infty$.