

Plaquette 2 - Calculer des limites : formes indéterminées

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Face à une forme indéterminée ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 1^∞), on transforme l'écriture : **factoriser** par le terme dominant, multiplier par la **quantité conjuguée** pour une différence de racines, passer à l'**exponentielle** pour une puissance variable ($a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$), puis utiliser les **croissances comparées** et les limites de référence. Quand aucune transformation ne donne la limite, on **encadre** (gendarmes) ou on **domine** l'écart à la limite par une suite qui tend vers 0.

Exercice 1 - Un quotient de polynômes

Déterminer la limite de $u_n = \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5}$.

Exercice 2 - Différence de racines

Déterminer les limites de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et de $v_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Exercice 3 - Puissances de 2 et de 3

Déterminer la limite de $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$.

Exercice 4 - Croissances comparées

Déterminer les limites de $a_n = n^2 e^{-n}$, $b_n = \frac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$ et $c_n = \frac{n^{10}}{1,01^n}$.

Exercice 5 - La suite qui définit e

Montrer que $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$.

Exercice 6 - Une variante

Déterminer la limite de $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$, puis de $v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 7 - Le sinus de 1/n

Déterminer la limite de $u_n = n \sin \frac{1}{n}$, puis de $v_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (on pourra utiliser $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$).

Exercice 8 - Factorielle contre puissance

Montrer que $u_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$.

Exercice 9 - Une somme encadrée

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$.

Exercice 10 - Dominer l'écart

Déterminer la limite de $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\cos n}{n^2}$.

Exercice 11 - Différence de logarithmes

Déterminer les limites de $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ et de $v_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$.

Exercice 12 - La racine n-ième de n

Montrer que $u_n = n^{1/n} \rightarrow 1$, puis que $v_n = (n^2 + 1)^{1/n} \rightarrow 1$.

Exercice 13 - Le rapport de deux termes consécutifs

Montrer que $u_n = \frac{5^n}{n!} \rightarrow 0$ en étudiant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$.
- b) Si $|u_n| \rightarrow |\ell|$, alors $u_n \rightarrow \ell$.
- c) Si $u_n v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$ ou $v_n \rightarrow 0$.
- d) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et (v_n) est bornée, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 - Synthèse : trois limites

Déterminer les limites de :

- a) $a_n = \frac{n + \ln n}{n - \sqrt{n}}$;
- b) $b_n = (n+1)^{1/n}$;
- c) $c_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.