

Plaquette 1 - Convergence, théorèmes de comparaison et suites récurrentes

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On utilise la définition en ε , les **opérations** sur les limites, les **gendarmes**, le **théorème de la limite monotone**, et l'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ par point fixe et monotonie.

Exercice 1 - Limite par quotient

Déterminer la limite de $u_n = \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5}$.

Exercice 2 - Théorème des gendarmes

Déterminer la limite de $u_n = \frac{n + \cos n}{n + 1}$.

Exercice 3 - Croissances comparées

Déterminer les limites de :

- a) $\frac{n^5}{2^n}$
- b) $\frac{\ln n}{n}$
- c) $\frac{3^n}{n!}$

Exercice 4 - Suite monotone bornée

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

- a) Montrer que $u_n \leq 3$ pour tout n .
- b) Montrer que (u_n) est croissante et conclure.

Exercice 5 - Suite arithmético-géométrique

Soit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$. Exprimer u_n et donner sa limite.

Exercice 6 - Suite récurrente non monotone

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{6}{1 + u_n}$. Déterminer la limite éventuelle et calculer les premiers termes.

Exercice 7 - Suites adjacentes

Soient $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer qu'elles sont adjacentes.

Exercice 8 - Divergence

Montrer que $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 9 - Suites extraites

Montrer que $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ ne converge pas.

Exercice 10 - Somme et gendarmes

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Exercice 11 - Moyenne de Cesàro

Soit $u_n \rightarrow \ell$. Montrer que $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow \ell$, et donner un contre-exemple à la réciproque.

Exercice 12 - Suite définie implicitement

Pour $n \geq 1$, soit x_n l'unique solution dans $]0; 1[$ de $x^n + x = 1$. Montrer que (x_n) converge et donner sa limite.

Exercice 13 - Revenir à la définition

Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Montrer, en revenant à la définition, que $u_n \rightarrow 2$: pour $\varepsilon > 0$ donné, trouver un rang N explicite. Application numérique : $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 14 - Une série géométrique

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Calculer S_n , puis sa limite. À partir de quel rang S_n est-il à moins de 10^{-4} de sa limite ?

Exercice 15 - Synthèse : méthode de Héron

Soit $a > 0$, $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$ et estimer la vitesse pour $a = 2$, $u_0 = 2$.