

## Plaqueette 5 - Récurrences linéaires et modèles

### Suites numériques — Licence 1 (L1)

#### Exercices

#### Méthode

Une suite **récurrente linéaire d'ordre 2**,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ , s'étudie avec son **équation caractéristique**  $r^2 = ar + b$  : selon qu'elle a deux racines, une racine double ou deux racines complexes conjuguées, on connaît la forme de  $u_n$ , et les deux premiers termes fixent les constantes. Une suite **arithmético-géométrique**  $u_{n+1} = au_n + b$  se ramène à une suite géométrique en retranchant son point fixe. Dans un **modèle** (emprunt, dilution, population), on traduit l'énoncé en relation de récurrence, on résout, puis on interprète le résultat (seuil, limite) dans le contexte.

#### Exercice 1 - Deux racines réelles

Soit  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 4$  et  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et vérifier sur  $u_2$ .

#### Exercice 2 - La formule de Binet

Soit  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Exprimer  $F_n$  à l'aide de  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , puis montrer que  $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$ .

#### Exercice 3 - Une racine double

Soit  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 4$  et  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ . Exprimer  $u_n$ .

#### Exercice 4 - Des racines complexes

Soit  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ . Calculer les premiers termes, puis exprimer  $u_n$ .

#### Exercice 5 - Rembourser un emprunt

On emprunte 10 000 € au taux de 1 % par mois, et on rembourse 500 € à la fin de chaque mois. On note  $u_n$  le capital restant dû après  $n$  mois.

- Justifier que  $u_{n+1} = 1,01 u_n - 500$ .
- Exprimer  $u_n$  et déterminer le nombre de mois nécessaires.

#### Exercice 6 - Une suite homographique

Soit  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ . On pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique et en déduire la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 7 - Une somme télescopique**

Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  et sa limite.

**Exercice 8 - Une somme de n termes**

Soit  $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$  ( $n \geq 1$ ). Montrer que  $(u_n)$  est croissante et majorée, donc convergente.

**Exercice 9 - Franchir un seuil**

Avec  $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$  (exercice 1), déterminer le plus petit  $n$  tel que  $u_n > 10^6$ .

**Exercice 10 - Une suite géométrique complexe**

Soit  $z_0 = 1$  et  $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$ . Montrer que  $z_n \rightarrow 0$ , et décrire la position des points  $z_n$  dans le plan.

**Exercice 11 - Une dilution**

Un bassin de 1 000 L d'eau pure reçoit chaque heure le traitement suivant : on retire 100 L et on les remplace par 100 L d'une solution à 5 g/L. On note  $c_n$  la concentration (en g/L) après  $n$  heures.

- Montrer que  $c_{n+1} = 0,9 c_n + 0,5$ .
- Exprimer  $c_n$  ; au bout de combien d'heures dépasse-t-on 4,5 g/L ?

**Exercice 12 - Retrouver les carrés**

Soit  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ . Exprimer  $u_n$  de deux façons.

**Exercice 13 - Vitesses de convergence**

Combien de termes faut-il pour que  $\frac{1}{n}$ , puis  $\frac{1}{2^n}$ , puis  $\frac{1}{n!}$  soient inférieurs à  $10^{-6}$  ?

**Exercice 14 - Vrai ou faux ?**

- Toute suite vérifiant  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  tend vers  $+\infty$ .
- Si l'équation caractéristique a deux racines de module  $< 1$ ,  $u_n \rightarrow 0$ .
- Une suite arithmético-géométrique  $u_{n+1} = au_n + b$  avec  $|a| < 1$  converge.
- Pour une racine double  $r$ ,  $u_n = \lambda r^n$ .

**Exercice 15 - Synthèse : la moyenne des deux précédents**

Soit  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ .

- Calculer  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ .
- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et déterminer sa limite.
- Retrouver cette limite en montrant que  $u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$  est constant.