

Plaquette 4 - Suites adjacentes, suites extraites

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Deux suites sont **adjacentes** si l'une croît, l'autre décroît, et leur différence tend vers 0 : elles convergent alors vers la même limite ℓ , qu'elles **encadrent** à chaque rang. C'est l'outil idéal pour prouver l'existence d'une limite qu'on ne sait pas calculer (e, γ , une somme alternée). Les **suites extraites** ($u_{\varphi(n)}$), avec φ strictement croissante, servent dans les deux sens : toutes les extraites d'une suite convergente ont la même limite (donc deux extraites de limites différentes prouvent la divergence), et si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, (u_n) converge.

Exercice 1 - Dichotomie pour $\sqrt{2}$

On pose $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et, avec $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$: si $m_n^2 \leq 2$, $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

- Calculer les termes jusqu'à $n = 3$.
- Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et que leur limite est $\sqrt{2}$.

Exercice 2 - La constante d'Euler

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$. En admettant que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$, montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 3 - La série harmonique alternée

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 4 - La moyenne arithmético-géométrique

Soient $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 5 - Deux suites définies ensemble

Soient $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

- Calculer $v_{n+1} - u_{n+1}$ en fonction de $v_n - u_n$.
- Montrer que les suites sont adjacentes.
- Montrer que $2u_n + 3v_n$ est constant et en déduire la limite.

Exercice 6 - Divergence par les extraites

Montrer que les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ divergent.

Exercice 7 - Paires et impaires suffisent

Montrer que si $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 8 - Trois extraites

On suppose que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 9 - Valeurs d'adhérence

Déterminer les valeurs d'adhérence de $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ et de $v_n = \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$).

Exercice 10 - Une extraite ne suffit pas

- a) Montrer que si $u_n \rightarrow \ell$, alors $u_{n^2} \rightarrow \ell$.
- b) Donner une suite divergente telle que (u_{n^2}) converge.

Exercice 11 - Encadrer à chaque rang

Soit $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$. On admet que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, de limite $\frac{\pi}{4}$. Donner un encadrement de π à l'aide de u_4 et u_5 .

Exercice 12 - Adjacentes : le cas des inégalités strictes

Soient (u_n) strictement croissante et (v_n) strictement décroissante, adjacentes, de limite ℓ . Montrer que $u_n < \ell < v_n$ pour tout n .

Exercice 13 - Bolzano-Weierstrass en action

Soit (u_n) une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence ℓ . Montrer que $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

- a) Deux suites adjacentes ont la même limite.
- b) Si (u_n) croît, (v_n) décroît et $u_n \leq v_n$, elles sont adjacentes.
- c) Toute suite bornée converge.
- d) Si (u_{2n}) converge, (u_n) est bornée.

Exercice 15 - Synthèse : e est irrationnel

Soient $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour $n \geq 1$.

- a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on admet que leur limite est e).

b) En supposant $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \geq 1$, montrer que $q \cdot q! u_q$ est un entier N et obtenir $N < q \cdot q! e < N + 1$. Conclure.