

Plaquette 3 - Suites récurrentes du type $u(n+1) = f(u(n))$

Suites numériques — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$, on suit un plan en quatre temps. **1)** Trouver un intervalle I **stable** ($f(I) \subset I$) contenant u_0 : tous les termes y restent (récurrence). **2)** Chercher les **points fixes** ($f(\ell) = \ell$) : ce sont les seules limites finies possibles si f est continue. **3)** Étudier la **monotonie** : si f est croissante sur I , la suite est monotone, dans le sens donné par le signe de $u_1 - u_0$ (ou de $f(x) - x$ sur I). **4)** Conclure : monotone et bornée, elle converge vers un point fixe ; sinon, elle tend vers l'infini. Si f est **décroissante**, on étudie les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

Exercice 1 - Une racine qui se stabilise

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 - Le carré itéré

Soit $u_{n+1} = u_n^2$. Étudier (u_n) selon la valeur de $u_0 \geq 0$.

Exercice 3 - Une suite décroissante vers 0

Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 - Discuter selon le premier terme

Soit $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3}$. Étudier la suite pour $u_0 = 0$, $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_0 = 3$.

Exercice 5 - Le cosinus itéré

Soit $u_0 \in [0; 1]$ et $u_{n+1} = \cos u_n$. Montrer que $[0; 1]$ est stable, que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution ℓ dans $[0; 1]$, puis que $|u_{n+1} - \ell| \leq \sin(1)|u_n - \ell|$. Conclure.

Exercice 6 - Deviner puis démontrer

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$. Calculer u_1, u_2, u_3 , conjecturer une formule, la démontrer et en déduire la limite.

Exercice 7 - Une fonction décroissante

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergent vers la même limite, que l'on déterminera.

Exercice 8 - Le logarithme itéré

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 9 - Une suite qui s'échappe

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 10 - La suite logistique

Soit $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 - La racine du double

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Montrer que (u_n) converge vers 2, puis exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 12 - Le signe de $f(x) - x$

Soit f croissante et continue sur un intervalle stable I , et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$. Montrer que si $f(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, la suite est croissante. Application :
 $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Exercice 13 - Le sinus itéré

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 - Vrai ou faux ?

Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

- a) Si f est croissante, (u_n) est croissante.
- b) Si f est continue et (u_n) converge vers ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.
- c) Si f a un point fixe, (u_n) converge.
- d) Si f est décroissante, (u_n) n'est jamais monotone.

Exercice 15 - Synthèse : une discussion complète

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que $f(x) - x = \frac{(x-1)^2}{2}$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (u_n) ?
- b) Étudier la limite de (u_n) selon $u_0 \in \mathbb{R}$.