

Fiche de révision — Suites numériques

Licence 1 (L1) — convergence, théorèmes et suites récurrentes

1. Convergence : définition et conséquences

$$u_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

La limite est **unique**. Toute suite convergente est **bornée**.
Modifier un nombre fini de termes ne change pas la limite.

Limites infinies :

$$u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n \geq N, u_n > A.$$

Définition analogue pour $-\infty$.

Preuve ε - N : partir de $|u_n - \ell|$, majorer, imposer $< \varepsilon$, puis choisir explicitement $N(\varepsilon)$.

2. Opérations et ordre

Si $u_n \rightarrow \ell, v_n \rightarrow m$:

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + m, \quad u_n v_n \rightarrow \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un rang et

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang et si les deux suites convergent, alors $\ell \leq m$.

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Elles ne donnent aucune limite : il faut transformer l'expression.

3. Comparaison et gendarmes

Si, à partir d'un rang,

$$a_n \leq u_n \leq b_n, \quad a_n \rightarrow \ell, \quad b_n \rightarrow \ell,$$

alors $\boxed{u_n \rightarrow \ell}$.

Exemple : $|\sin n| \leq 1$ implique

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

4. Suites monotones

- croissante + majorée $\Rightarrow$ convergente ;
- décroissante + minorée $\Rightarrow$ convergente.

Et

$$\lim u_n = \sup\{u_n\} \quad \text{ou} \quad \inf\{u_n\}.$$

Croissante seule ne suffit pas : $u_n = n \rightarrow +\infty$.

5. Limites usuelles

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} &\rightarrow 0 \quad (\alpha > 0), & q^n &\rightarrow 0 \quad (|q| < 1), \\ n^\alpha &\rightarrow +\infty \quad (\alpha > 0), & q^n &\rightarrow +\infty \quad (q > 1). \end{aligned}$$

Pour un quotient de polynômes en n , diviser par la plus grande puissance pertinente.

6. Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si

$$u_n \nearrow, \quad v_n \searrow, \quad v_n - u_n \rightarrow 0.$$

Alors elles convergent vers une même limite ℓ et

$$\boxed{u_n \leq \ell \leq v_n}.$$

7. Suites extraites

Une suite extraite est $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $u_n \rightarrow \ell$, toute suite extraite converge vers ℓ .

Donc deux sous-suites de limites différentes prouvent la **divergence** de (u_n) .

Exemple : pour $u_n = (-1)^n$,

$$u_{2n} = 1 \rightarrow 1, \quad u_{2n+1} = -1 \rightarrow -1.$$

Donc (u_n) diverge.

Bolzano–Weierstrass : toute suite réelle bornée possède au moins une suite extraite convergente.

Une limite de sous-suite est appelée **valeur d'adhérence**.

8. Réflexes pour démontrer une limite

- Expression avec un terme oscillant borné : majorer en valeur absolue et utiliser les gendarmes.
- Suite monotone : chercher immédiatement la borne adaptée.
- Oscillation : tester les sous-suites paires et impaires.
- Quotient ∞/∞ : factoriser par le terme dominant.
- Différence $\infty - \infty$: mettre au même dénominateur, factoriser ou rationaliser.

9. Erreurs de logique fréquentes

- bornée $\nRightarrow$ convergente ;
- monotone $\nRightarrow$ convergente sans borne adaptée ;
- $u_n < v_n$ n'implique pas $\lim u_n < \lim v_n$;
- une forme indéterminée n'est jamais un résultat ;
- Bolzano–Weierstrass ne dit pas que la suite entière converge.

10. Exemple éclair

Pour $u_n = \frac{n}{n+1}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

donc (u_n) est croissante ; elle est majorée par 1. Elle converge et

$$1 - u_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_n \rightarrow 1}.$$

Suites récurrentes : méthode et pièges

11. Récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$ **Plan standard :**

1. Trouver un intervalle stable $I : f(I) \subset I$.
2. Prouver par récurrence que $u_n \in I$.
3. Étudier $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, ou exploiter la monotonie de f .
4. Obtenir monotonie + borne, donc convergence.
5. Si f est continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors seulement :

$$\ell = f(\ell).$$

6. Garder les points fixes compatibles avec I .

Piège majeur : résoudre $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas la convergence. $f(x) = 2x$ a le point fixe 0, mais $u_{n+1} = 2u_n$, $u_0 = 1$, donne $u_n = 2^n \rightarrow +\infty$.

12. Exemple-type complet

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Stabilité. Pour $x \in [0, 2]$, $\sqrt{2+x} \in [0, 2]$. Donc $0 \leq u_n \leq 2$.

Monotonie. Pour $x \in [0, 2]$,

$$\sqrt{2+x} \geq x \iff 2+x \geq x^2 \iff (2-x)(x+1) \geq 0.$$

Donc (u_n) est croissante.

Convergence. Croissante et majorée par 2, donc convergente.

Limite. Par continuité,

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0.$$

Comme $\ell \in [0, 2]$, $\ell = 2$.

13. Récurrence affine

Si

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad a \neq 1,$$

le point fixe vaut

$$\ell = \frac{b}{1-a}.$$

Avec $v_n = u_n - \ell$,

$$v_{n+1} = av_n, \quad v_n = a^n(u_0 - \ell),$$

donc

$$u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell).$$

Si $|a| < 1$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

14. Comment établir la monotonie ?

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, trois méthodes classiques :

- calculer le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$;
- factoriser $f(x) - x$ sur l'intervalle stable ;
- si f est croissante, partir de $u_1 \geq u_0$ (ou $\leq$) et propager l'inégalité par récurrence.

15. Choisir le bon outil

Situation	Réflexe
Encadrement	Gendarmes
Monotone + borne	Limite monotone
Deux encadrements resserrés	Suites adjacentes
Oscillation	Sous-suites
Suite bornée	Bolzano–Weierstrass pour extraire
Récurrence	Stabilité, monotonie, borne, point fixe

16. Mini-exemples

Gendarmes :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Suite géométrique : si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.

Somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

17. Checklist d'examen

Avant d'écrire « donc la suite converge », vérifier :

1. ai-je cité un théorème avec toutes ses hypothèses ?
2. si j'utilise monotonie, ai-je la bonne borne ?
3. ai-je traité toute forme indéterminée ?
4. pour une récurrence, ai-je prouvé la convergence **avant** le point fixe ?
5. le passage à la limite dans $f(u_n)$ est-il justifié par la continuité ?
6. en cas de divergence, ai-je fourni un argument précis ?

18. À savoir par cœur

- définition ε - N de $u_n \rightarrow \ell$;
- théorème des gendarmes ;
- théorème de la limite monotone ;
- théorème des suites adjacentes ;
- toute sous-suite d'une suite convergente a la même limite ;
- Bolzano–Weierstrass ;
- si $u_n \rightarrow \ell$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, alors $\ell = f(\ell)$.