

Suites numériques

Licence 1 (L1) — Analyse : convergence et récurrence

Idée directrice. Une suite n'est pas seulement une liste de nombres : c'est une fonction définie sur les entiers. En L1, on remplace l'intuition « les termes se rapprochent de ℓ » par une définition quantifiée en ε , puis on apprend à établir la convergence à l'aide de théorèmes précis.

Objectifs. À la fin du chapitre, on doit savoir : utiliser la définition ε - N d'une limite ; calculer des limites en justifiant les opérations ; reconnaître et traiter les formes indéterminées ; appliquer comparaison et gendarmes ; exploiter la monotonie et les suites adjacentes ; manipuler les suites extraites et Bolzano-Weierstrass ; étudier une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sans confondre existence d'un point fixe et convergence.

1. Notations et premières propriétés

Suite réelle

Une **suite réelle** est une application

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u_n.$$

On peut aussi considérer une suite définie à partir d'un rang n_0 : $u = (u_n)_{n \geq n_0}$.

Une propriété qui est vraie à partir d'un certain rang est dite vraie **pour n assez grand**. Modifier un nombre fini de termes ne change donc ni la convergence ni la limite.

Bornes et monotonie

La suite (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n ;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ pour tout n ;
- **bornée** s'il existe $C \geq 0$ tel que $|u_n| \leq C$ pour tout n ;
- **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ; **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple

$u_n = \frac{n}{n+1}$ est croissante et majorée par 1. La suite $v_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est ni croissante ni décroissante.

2. Convergence et définition en ε

Convergence vers une limite finie

On dit que (u_n) **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.}$$

On écrit alors $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

La phrase signifie : quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ imposée, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang N , appartiennent à l'intervalle $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Démontrer une limite avec la définition

Pour prouver $u_n \rightarrow \ell$:

1. partir de $|u_n - \ell|$;
2. obtenir une majoration simple dépendant de n ;
3. imposer cette majoration $< \varepsilon$;
4. choisir explicitement un rang $N = N(\varepsilon)$.

Preuve de $1/n \rightarrow 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > 1/\varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Donc $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Unicité de la limite

Une suite convergente possède une unique limite.

Preuve. Supposons $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \ell'$. Si $\ell \neq \ell'$, choisissons $\varepsilon = |\ell - \ell'|/3$. Pour n assez grand, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire,

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|,$$

contradiction. Ainsi $\ell = \ell'$.

Toute suite convergente est bornée

Si $u_n \rightarrow \ell$, alors (u_n) est bornée.

Idée. Avec $\varepsilon = 1$, on a $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang, donc $|u_n| \leq |\ell| + 1$ pour les termes tardifs ; les termes précédents sont en nombre fini.

Piège classique

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais oscille entre -1 et 1 .

2.1. Limites infinies

On écrit $u_n \rightarrow +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

De même, $u_n \rightarrow -\infty$ si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $u_n < A$ à partir d'un certain rang.

3. Opérations sur les limites

Opérations pour des limites finies

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow m$, alors

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + m, \quad u_n v_n \rightarrow \ell m, \quad \lambda u_n \rightarrow \lambda \ell.$$

Si de plus $m \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

On en déduit les limites de polynômes et de fonctions rationnelles lorsque le dénominateur ne tend pas vers 0.

Passage à la limite dans les inégalités

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \rightarrow \ell$, $v_n \rightarrow m$, alors $\ell \leq m$.

Attention : une inégalité stricte ne reste pas nécessairement stricte à la limite. Par exemple $0 < 1/n$ pour tout n , mais $1/n \rightarrow 0$.

3.1. Formes indéterminées

Les écritures

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

ne déterminent aucune limite à elles seules. Il faut transformer l'expression.

Lever une forme ∞/∞

$$\frac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 5n} = \frac{3 - 1/n + 4/n^2}{2 + 5/n} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

On divise numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de n pertinente.

Piège classique

Écrire « $\infty/\infty = 1$ » ou « $0 \times \infty = 0$ » est faux. Une forme indéterminée signale précisément qu'un calcul supplémentaire est nécessaire.

4. Comparaison et théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

S'il existe un rang à partir duquel

$$a_n \leq u_n \leq b_n,$$

et si $a_n \rightarrow \ell$ et $b_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Exemple

Comme $|\sin n| \leq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Les deux suites extrêmes tendent vers 0, donc $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

Comparaison avec l'infini

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$. Si $u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

5. Suites monotones**Théorème de la limite monotone**

— Toute suite croissante et majorée converge. Plus précisément,

$$\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

— Toute suite décroissante et minorée converge. Plus précisément,

$$\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ce théorème repose directement sur la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Exemple

Pour $u_n = \frac{n}{n+1}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

donc (u_n) est croissante. De plus $u_n < 1$, donc elle est majorée. Elle converge ; le calcul

$$1 - u_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donne finalement $u_n \rightarrow 1$.

Piège classique

« Croissante » ne signifie pas « convergente ». La suite $u_n = n$ est croissante mais non majorée, donc elle tend vers $+\infty$.

6. Suites adjacentes**Suites adjacentes**

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ . De plus, pour tout n ,

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Pourquoi ? La suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0 et est positive à partir d'un certain rang. En pratique, $u_n \leq v_n$, donc (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) minorée par u_0 . Le théorème de la limite monotone donne des limites $\ell_1 \leq \ell_2$, puis $\ell_2 - \ell_1 = 0$.

Encadrement décimal

Si $u_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$, alors $u_n \leq x < v_n$ et $v_n - u_n = 10^{-n} \rightarrow 0$. Ces suites sont adjacentes et convergent vers x .

7. Suites extraites**Suite extraite**

Une **suite extraite** de (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$, où

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

est strictement croissante. On dit aussi **sous-suite**.

Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$; les indices extraits tendent donc vers $+\infty$.

Théorème

Si $u_n \rightarrow \ell$, alors toute suite extraite $u_{\varphi(n)}$ converge aussi vers ℓ .

Montrer qu'une suite diverge

Trouver deux suites extraites ayant des limites différentes suffit à conclure que la suite initiale diverge.

Exemple

Pour $u_n = (-1)^n$,

$$u_{2n} = 1 \rightarrow 1, \quad u_{2n+1} = -1 \rightarrow -1.$$

La suite (u_n) ne peut donc pas converger.

Bolzano–Weierstrass

Toute suite réelle bornée possède au moins une suite extraite convergente.

Ce résultat ne dit pas que la suite entière converge. Il garantit l'existence d'au moins une **valeur d'adhérence**, c'est-à-dire une limite d'une suite extraite.

Exemple

La suite $(-1)^n$ est bornée. Bolzano–Weierstrass s'applique : elle possède même deux suites extraites convergentes, l'une vers 1, l'autre vers -1 .

8. Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

se comprend en étudiant simultanément la fonction f et la trajectoire des termes u_n .

8.1. Étape 1 : trouver un intervalle stable

Intervalle stable

Un intervalle I est **stable** par f si

$$f(I) \subset I.$$

Si $u_0 \in I$ et I est stable, alors $u_n \in I$ pour tout n , par récurrence.

Cette étape fournit souvent une majoration et/ou une minoration indispensables à la convergence.

8.2. Étape 2 : déterminer le sens de variation

Plusieurs méthodes sont possibles :

- étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$;
- factoriser $f(x) - x$ sur l'intervalle stable ;
- utiliser la monotonie de f et une première comparaison $u_1 \geq u_0$ ou $u_1 \leq u_0$.

8.3. Étape 3 : prouver la convergence

Une fois la monotonie et une borne établies, le théorème de la limite monotone donne l'existence d'une limite ℓ .

8.4. Étape 4 : seulement ensuite, identifier la limite

Passage à la limite dans une récurrence

Si $u_n \rightarrow \ell$, si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est continue en ℓ , alors

$$\ell = f(\ell).$$

La limite éventuelle est donc un point fixe de f .

Le piège central

Résoudre $\ell = f(\ell)$ ne prouve jamais, à lui seul, que (u_n) converge. Par exemple, $f(x) = 2x$ possède le point fixe 0, mais la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n$ avec $u_0 = 1$ vaut $u_n = 2^n$ et diverge vers $+\infty$.

Étude complète : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Stabilité de $[0, 2]$. Si $0 \leq x \leq 2$, alors $2 \leq 2 + x \leq 4$, donc

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + x} \leq 2.$$

Ainsi $f([0, 2]) \subset [0, 2]$ et, par récurrence, $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Croissance. Pour $x \in [0, 2]$,

$$\sqrt{2 + x} \geq x \iff 2 + x \geq x^2 \iff (2 - x)(x + 1) \geq 0.$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$.

3. Convergence. La suite est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0, 2]$.

4. Point fixe. La fonction racine est continue, donc

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

Les solutions sont 2 et -1 , mais $\ell \in [0, 2]$. Ainsi $\boxed{\ell = 2}$.

8.5. Cas affine : $u_{n+1} = au_n + b$

Si $a \neq 1$, le point fixe est $\ell = \frac{b}{1-a}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient

$$v_{n+1} = av_n, \quad v_n = a^n v_0,$$

donc

$$\boxed{u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)}.$$

En particulier, si $|a| < 1$, alors $a^n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \ell$.

9. Méthodes de rédaction à connaître**Plan type pour une suite récurrente**

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. chercher un intervalle I contenant u_0 et vérifier $f(I) \subset I$;
2. en déduire par récurrence que $u_n \in I$;
3. étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou exploiter la monotonie de f ;
4. obtenir monotonie + borne, puis conclure à la convergence ;
5. seulement après, passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ et résoudre $\ell = f(\ell)$;
6. garder uniquement les solutions compatibles avec l'intervalle stable.

Choisir le bon théorème

- **Expression explicite** : simplifier, factoriser, comparer les termes dominants.
- **Encadrement** : penser au théorème des gendarmes.
- **Monotonie + borne** : appliquer le théorème de la limite monotone.
- **Deux bornes qui se rapprochent** : penser aux suites adjacentes.
- **Oscillation** : chercher deux suites extraites de limites différentes.
- **Suite bornée sans limite évidente** : Bolzano–Weierstrass peut fournir une sous-suite convergente.

10. Erreurs fréquentes

À éviter

- Confondre « bornée » et « convergente ».
- Oublier qu'une suite croissante doit aussi être majorée pour converger vers un réel.
- Utiliser une opération sur les limites dans une forme indéterminée.
- Dédire une inégalité stricte sur les limites d'une inégalité stricte terme à terme.
- Affirmer qu'une suite converge parce qu'elle possède un point fixe potentiel.
- Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans avoir auparavant établi la convergence de (u_n) .
- Oublier de vérifier la continuité de f au point limite lors du passage à la limite.

11. Exercices corrigés

Exercice 1 — Définition en ε

Montrer que $u_n = \frac{3}{n+2}$ tend vers 0.

Correction. Soit $\varepsilon > 0$. On veut $\frac{3}{n+2} < \varepsilon$, soit $n > 3/\varepsilon - 2$. Il suffit donc de choisir un entier $N > 3/\varepsilon - 2$. Pour tout $n \geq N$, $|u_n| < \varepsilon$. Ainsi $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 2 — Gendarmes

Déterminer la limite de $u_n = \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Correction. Comme $|\cos(n^2)| \leq 1$,

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 3 — Suite monotone

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Correction. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$, donc (u_n) est croissante. La somme géométrique donne

$$u_n = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

donc elle est majorée. Elle converge, et la formule explicite donne $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 4 — Suites extraites

Étudier la convergence de $u_n = \cos(n\pi)$.

Correction. $u_n = (-1)^n$. Les sous-suites $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ convergent vers deux limites différentes. Donc (u_n) diverge.

Exercice 5 — Récurrence affine

Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Déterminer u_n et sa limite.

Correction. Le point fixe vérifie $\ell = \ell/2 + 3$, donc $\ell = 6$. Posons $v_n = u_n - 6$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n, \quad v_0 = -2,$$

d'où $v_n = -2(1/2)^n$. Ainsi

$$\boxed{u_n = 6 - 2^{1-n}} \quad \text{et} \quad u_n \rightarrow 6.$$

Exercice 6 — Récurrence non linéaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. Montrer que $u_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Correction. Tous les termes sont positifs. Pour $x > 0$,

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \geq \sqrt{2}$$

par l'inégalité arithmético-géométrique. Ainsi $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$. De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$$

à partir de $n = 1$, puisque $u_n \geq \sqrt{2}$. La suite est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, donc convergente. Si $u_n \rightarrow \ell > 0$, alors

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right),$$

donc $\ell^2 = 2$ et, comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{2}$.

12. À retenir

- La convergence est une propriété quantifiée : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N$.
- Monotonie + bonne borne $\Rightarrow$ convergence.
- Deux suites adjacentes ont une limite commune.
- Une suite convergente transmet sa limite à toutes ses suites extraites; deux sous-suites de limites différentes prouvent la divergence.
- Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente (Bolzano–Weierstrass).
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, on prouve d'abord la convergence; l'équation $\ell = f(\ell)$ sert ensuite à identifier la limite.