

**Plaque 1 - Échelonnement, rang,
compatibilité et systèmes à paramètre**
Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)
Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire. Un système de p équations à n inconnues s'écrit $AX = B$.

- **Homogène** : $B = 0$; l'ensemble des solutions est un **sous-espace vectoriel** de dimension $n - \text{rg}(A)$.
- **Structure affine** : solutions de $AX = B =$ une solution particulière + solutions de $AX = 0$.

Opérations élémentaires (qui conservent l'ensemble des solutions) :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange) ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$;
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$).

Pivot de Gauss. On échelonne le système, on identifie les **inconnues principales** (celles des pivots) et les **inconnues secondaires** (paramètres libres), puis on remonte.

Discussion.

- **Système de Cramer** : $p = n$ et $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ solution **unique**.
- **Incompatible** : apparition d'une ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ — aucune solution.
- **Indéterminé** : $\text{rg}(A) = r < n$ et compatibilité — l'ensemble des solutions est un sous-espace **affine de dimension** $n - r$.
- **Théorème du rang** : nombre d'inconnues = rang + dimension de l'espace des solutions homogènes.

$$\dim \{X: AX = 0\} = n - \text{rg}(A), \quad AX = B \text{ compatible} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A | B)$$

Interprétation géométrique (dans $\mathbb{R}^3$) : chaque équation est un **plan**. Trois plans peuvent se couper en un point (Cramer), selon une droite, selon un plan, ou n'avoir aucun point commun.

Correction de l'exercice 1 - Système 2x2

Par substitution : la seconde donne $y = 3 - x$.

- On reporte : $3x - 2(3 - x) = 4$, soit $5x - 6 = 4$, donc $x = 2$.
- Puis $y = 1$.
- **Solution unique** : $(x, y) = (2, 1)$.
- **Vérifications** : $6 - 2 = 4 \checkmark$ et $2 + 1 = 3 \checkmark$
- **Contrôle du caractère de Cramer** : $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$ — il y a bien une unique solution.
- **Lecture géométrique** : deux droites **sécantes** du plan, se coupant au point $(2; 1)$.

Réponse. $(x, y) = (2, 1)$.

Correction de l'exercice 2 - Pivot de Gauss 3x3

Échelonnement avec L_1 comme pivot.

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : -3y - 3z = -15$, soit $y + z = 5$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 : -5y - z = -13$.
- $L_3 \leftarrow L_3 + 5 \times (y + z = 5) : 4z = 12$, donc $z = 3$.

Remontée.

- $y = 5 - 3 = 2$.
- $x = 8 - 4 - 3 = 1$.
- **Solution** : $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.
- **Vérifications** : $1 + 4 + 3 = 8 \checkmark$; $2 + 2 - 3 = 1 \checkmark$; $3 + 2 + 6 = 11 \checkmark$
- **Lecture** : trois plans concourants en un **point unique** — le rang vaut 3.

Réponse. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Système incompatible

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $0 = 3 - 2 = 1$.
- On obtient une **égalité impossible** : le système n'a **aucune solution**.
- **Rang** : $\text{rg}(A) = 1$, alors que la matrice **augmentée** est de rang 2 — c'est exactement le critère d'incompatibilité.
- **Interprétation géométrique** : deux plans de même vecteur normal $(1, 1, 1)$ mais de constantes différentes — ils sont **strictement parallèles**.
- **Vérification directe** : si $x + y + z = 1$, alors $2x + 2y + 2z = 2 \neq 3 \checkmark$ — les deux conditions sont bien contradictoires.
- **À retenir** : un système **homogène** n'est jamais incompatible (la solution nulle existe toujours).

Réponse. Aucune solution (plans strictement parallèles).

Correction de l'exercice 4 - Système indéterminé

- **Addition** des deux équations : $3x = 3$, donc $x = 1$.
- **Report dans la première** : $1 + y - z = 2$, donc $y = 1 + z$.
- **Rang** : 2 pour 3 inconnues, donc $3 - 2 = 1$ paramètre libre. On pose $z = t$.
- **Solutions** :

$$(x, y, z) = (1, 1 + t, t) = (1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$$
- **Vérification** avec $t = 2$: $(1, 3, 2)$ donne $1 + 3 - 2 = 2 \checkmark$ et $2 - 3 + 2 = 1 \checkmark$
- **Interprétation géométrique** : deux plans **sécants** se coupant selon une **droite**, de point $(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $(0, 1, 1)$.
- **Structure** : c'est bien une solution particulière plus le sous-espace des solutions homogènes.

Réponse. Droite : $(1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5 - Système homogène

- $L_2 = 2L_1$: la deuxième équation est **redondante**, on la supprime.
- **Système réduit** : $x + 2y + 3z = 0$ et $x - y + z = 0$.
- **Soustraction** : $3y + 2z = 0$, donc $y = -\frac{2z}{3}$.

- **Report** : $x = y - z = -\frac{2z}{3} - z = -\frac{5z}{3}$.
 - **Paramétrage** : en posant $z = 3t$ (pour éviter les fractions),
 $(x, y, z) = (-5t, -2t, 3t) = t(-5, -2, 3)$
 - **Vérification** : $-5 - 4 + 9 = 0 \checkmark$ et $-5 + 2 + 3 = 0 \checkmark$
 - **Structure** : c'est une **droite vectorielle**, de dimension $1 = 3 - \text{rg}(A)$ avec $\text{rg}(A) = 2 \checkmark$
 - **Remarque** : la solution nulle ($t = 0$) est toujours présente — c'est la **solution triviale**.
- Réponse.** $(x, y, z) = t(-5, -2, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 - Rang d'un système

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : y = 2$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : 2y = 4$, soit $y = 2$ — **même** information.
- **Rang** : 2 (deux équations indépendantes), et la troisième est **conséquence** des deux premières.
- **Compatibilité** : oui — la solution est $y = 2$ puis $x = 1 - 2 = -1$.
- **Solution unique** : $(x, y) = (-1, 2)$.
- **Vérifications** : $-1 + 2 = 1 \checkmark$; $-1 + 4 = 3 \checkmark$; $-1 + 6 = 5 \checkmark$
- **Lecture géométrique** : trois droites **concourantes** au point $(-1 ; 2)$ — situation non générique, mais ici compatible.
- **Contre-exemple** : si la troisième équation était $x + 3y = 6$, le système deviendrait **incompatible**.

Réponse. Rang 2, système compatible : $(x, y) = (-1, 2)$.

Correction de l'exercice 7 - Système à paramètre

- **Déterminant** : $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$.
- Cas 1** : $m \neq \pm 1$. Système de **Cramer**, solution unique.
- $L_2 \leftarrow mL_2 - L_1 : (m^2 - 1)y = m - 1$, donc $y = \frac{1}{m + 1}$.
 - Par symétrie du système, $x = \frac{1}{m + 1}$.
- Cas 2** : $m = 1$. Les deux équations deviennent $x + y = 1$: une **droite** de solutions, $(t, 1 - t)$.
- Cas 3** : $m = -1$. Le système devient $-x + y = 1$ et $x - y = 1$, soit $y - x = 1$ et $y - x = -1$: **incompatible**.
- **Contrôle** avec $m = 2$: $x = y = \frac{1}{3}$, et $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \checkmark$
 - **Bilan géométrique** : deux droites sécantes (cas 1), confondues (cas 2) ou strictement parallèles (cas 3).
- Réponse.** $m \neq \pm 1$: $x = y = \frac{1}{m + 1}$; $m = 1$: droite ; $m = -1$: aucune solution.

Correction de l'exercice 8 - Quatre inconnues

- **Addition** : $2x + 2z = 4$, donc $x + z = 2$.
- **Soustraction** : $2y + 2t = -4$, donc $y + t = -2$.
- **Rang** : 2 pour 4 inconnues — il y a 2 paramètres libres. Posons $z = s$ et $t = u$.
- **Solutions** :

$$(x, y, z, t) = (2 - s, -2 - u, s, u)$$

- **Écriture vectorielle** : $(2, -2, 0, 0) + s(-1, 0, 1, 0) + u(0, -1, 0, 1)$.
- **Vérification** avec $s = 1, u = 3$: $(1, -5, 1, 3)$ donne $1 - 5 + 1 + 3 = 0$ ✓ et $1 + 5 + 1 - 3 = 4$ ✓
- **Structure** : sous-espace **affine de dimension 2** dans $\mathbb{R}^4$.
- **Méthode** : combiner les équations (somme, différence) avant de pivoter révèle souvent la structure immédiatement.

Réponse. $(2 - s, -2 - u, s, u), (s, u) \in \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 9 - Condition de compatibilité

- **Observation** : $L_3 = L_1 + L_2$ du côté gauche ($1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4$) ✓
- **Conséquence** : la compatibilité exige la même relation à droite, soit $a = 1 + 2 = 3$.
- **Vérification par échelonnement** : $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ donne $0 = a - 3$.
- **Conclusion** : compatible **si et seulement si** $a = 3$.

Résolution pour $a = 3$.

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $y + 2z = 1$, donc $y = 1 - 2z$.
- $x = 1 - y - z = 1 - (1 - 2z) - z = z$.
- **Solutions** : $(z, 1 - 2z, z)$, soit $(0, 1, 0) + t(1, -2, 1)$.
- **Contrôle** avec $t = 1$: $(1, -1, 1)$ donne $1, 1 - 2 + 3 = 2$ et $2 - 3 + 4 = 3$ ✓

Réponse. Compatible ssi $a = 3$; solutions $(0, 1, 0) + t(1, -2, 1)$.

Correction de l'exercice 10 - Interprétation géométrique

- **Normales** : $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 2)$, non colinéaires — les plans sont **sécants** selon une droite.
- **Élimination** : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-2y + z = -3$, soit $z = 2y - 3$.
- **Report** : $x = 3 - y - z = 3 - y - (2y - 3) = 6 - 3y$.
- **Paramétrage** avec $y = t$:

$$(x, y, z) = (6 - 3t, t, 2t - 3) = (6, 0, -3) + t(-3, 1, 2)$$
- **Vérifications** : $(6, 0, -3)$ donne $6 + 0 - 3 = 3$ ✓ et $6 - 0 - 6 = 0$ ✓
- **Contrôle du vecteur directeur** : il doit être **orthogonal aux deux normales** :
 $-3 + 1 + 2 = 0$ ✓ et $-3 - 1 + 4 = 0$ ✓
- **Autre méthode** : le vecteur directeur est le **produit vectoriel** des deux normales,
 $(1, 1, 1) \wedge (1, -1, 2) = (3, -1, -2)$ — colinéaire à celui trouvé ✓

Réponse. Droite $(6, 0, -3) + t(-3, 1, 2)$.

Correction de l'exercice 11 - Application : mélange

Notons x, y, z les volumes (en litres).

- **Volume total** : $x + y + z = 10$.
- **Quantité de sucre** : $0,1x + 0,2y + 0,5z = 2,5$.
- **Contrainte** : $x = 2y$.

Résolution.

- En substituant $x = 2y$: $3y + z = 10$, donc $z = 10 - 3y$.
- Sucre : $0,2y + 0,2y + 0,5(10 - 3y) = 2,5$, soit $0,4y + 5 - 1,5y = 2,5$.
- Donc $1,1y = 2,5$, d'où $y = \frac{25}{11} \approx 2,273$ L.

- Puis $x = \frac{50}{11} \approx 4,545$ L et $z = 10 - \frac{75}{11} = \frac{35}{11} \approx 3,182$ L.
 - **Vérifications** : volume $\frac{50 + 25 + 35}{11} = \frac{110}{11} = 10 \checkmark$; sucre $\frac{5 + 5 + 17,5}{11} = \frac{27,5}{11} = 2,5 \checkmark$
 - **Plausibilité** : les trois volumes sont **positifs**, la solution est physiquement réalisable $\checkmark$
- Réponse.** $x = \frac{50}{11}$, $y = \frac{25}{11}$, $z = \frac{35}{11}$ litres.

Correction de l'exercice 12 - Système de Vandermonde

Système.

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $3a + b = 1$.
 - $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $5a + b = 3$.
 - **Soustraction** : $2a = 2$, donc $a = 1$; puis $b = 1 - 3 = -2$ et $c = 2 - 1 + 2 = 3$.
 - **Parabole** : $y = x^2 - 2x + 3$.
 - **Vérifications** : $1 - 2 + 3 = 2 \checkmark$; $4 - 4 + 3 = 3 \checkmark$; $9 - 6 + 3 = 6 \checkmark$
 - **Unicité** : le déterminant du système est un **déterminant de Vandermonde**
 $\prod_{i < j} (x_j - x_i) = 1 \times 2 \times 1 = 2 \neq 0$ — trois points d'abscisses distinctes déterminent une **unique** parabole.
 - **Forme canonique** : $y = (x - 1)^2 + 2$, de sommet $(1 ; 2)$.
- Réponse.** $y = x^2 - 2x + 3$.

Correction de l'exercice 13 - Inverse par Gauss-Jordan

a) On annule sous le premier pivot, puis sous le deuxième :

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0 \ 1 \ 1 \mid -2 \ 1 \ 0)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0 \ 1 \ 2 \mid -1 \ 0 \ 1)$.
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $(0 \ 0 \ 1 \mid 1 \ -1 \ 1)$. La matrice est **échelonnée** avec trois pivots égaux à 1.
- On remonte : $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$: $(0 \ 1 \ 0 \mid -3 \ 2 \ -1)$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:
 $(1 \ 0 \ 0 \mid 6 \ -3 \ 1)$.

b) On a obtenu $(I_3 \mid B)$: A est inversible (trois pivots) et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Première ligne de A fois première colonne de A^{-1} : $6 - 6 + 1 = 1 \checkmark$; première ligne fois deuxième colonne : $-3 + 4 - 1 = 0 \checkmark$; troisième ligne fois troisième colonne :
 $1 - 3 + 3 = 1 \checkmark$

d) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2 \\ -3 - 2 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$

- **Vérification** dans le système : $8 - 10 + 3 = 1 \checkmark$; $16 - 25 + 9 = 0 \checkmark$; $8 - 15 + 9 = 2 \checkmark$
- **Méthode** : les opérations qui transforment A en I_3 transforment I_3 en A^{-1} ; c'est le même pivot que pour un système, avec trois seconds membres à la fois.

Réponse. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = (8, -5, 3)$.

Correction de l'exercice 14 - Équilibrer une réaction chimique

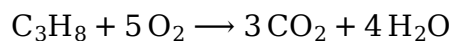
a) On compte chaque élément des deux côtés :

$$\begin{cases} 3a = c & \text{(C)} \\ 8a = 2d & \text{(H)} \\ 2b = 2c + d & \text{(O)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - c = 0 \\ 8a - 2d = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \end{cases}$$

b) (H) donne $a = \frac{d}{4}$; (C) donne $c = 3a = \frac{3d}{4}$; (O) donne $b = c + \frac{d}{2} = \frac{3d}{4} + \frac{2d}{4} = \frac{5d}{4}$.

— Solutions : $(a, b, c, d) = d\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 1\right)$, $d \in \mathbb{R}$.

c) Plus petits entiers : $d = 4$, d'où $a = 1$, $b = 5$, $c = 3$.



— **Vérification** : C : $3 = 3$; H : $8 = 8$; O : $10 = 6 + 4$ ✓

d) Trois équations indépendantes (trois pivots) pour quatre inconnues : le rang vaut 3, l'ensemble des solutions d'un système **homogène** est un sous-espace de dimension $4 - 3 = 1$: une droite. Physiquement : on peut multiplier une réaction équilibrée par n'importe quel facteur.

Réponse. $\text{C}_3\text{H}_8 + 5 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : discussion complète

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $(a - 1)y = a - 1$.

— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(a - 1)z = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$.

Cas 1 : $a \neq 1$. On peut diviser par $a - 1$.

— $y = 1$ et $z = a + 1$.

— Puis $x = 1 - y - z = 1 - 1 - (a + 1) = -a - 1$.

— **Solution unique** : $(x, y, z) = (-a - 1, 1, a + 1)$.

— **Vérification** avec $a = 2$: $(-3, 1, 3)$ donne $-3 + 1 + 3 = 1$ ✓ ; $-3 + 2 + 3 = 2$ ✓ ; $-3 + 1 + 6 = 4 = a^2$ ✓

Cas 2 : $a = 1$. Les trois équations deviennent $x + y + z = 1$ (et les seconds membres valent tous 1).

— Le système est **compatible**, de rang 1 : les solutions forment un **plan**,

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + u(-1, 0, 1)$$

— **Bilan** : solution unique pour $a \neq 1$, plan de solutions pour $a = 1$ — jamais d'incompatibilité ici.

Réponse. $a \neq 1$: $(-a - 1, 1, a + 1) \cdot a = 1$: le plan $x + y + z = 1$.