

Plaquette 5 - Modélisation par des systèmes linéaires

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire. Une loi de conservation « ce qui entre = ce qui sort » en chaque nœud donne une équation par nœud ; un équilibre « état = image de l'état » donne $X = AX + D$ ou $\pi P = \pi$.

$$(I - A)X = D \quad (\text{modèle de Leontief}), \quad \pi(P - I) = 0, \quad \sum_i \pi_i = 1 \quad (\text{Markov})$$

- **Kirchhoff** : loi des nœuds (somme des courants entrants = sortants) ; loi des mailles (somme des tensions = 0, avec $U = RI$).
- **Équilibrage chimique** : une équation par élément, système homogène, solution à un facteur près.
- **Rang et interprétation** : rang < nombre d'inconnues $\Rightarrow$ une famille de solutions ; les contraintes physiques ($x \geq 0$, entiers) en sélectionnent une partie.
- **Moindres carrés** : $A^T A X = A^T B$ pour ajuster un modèle linéaire à des mesures.
- **Modulo n** (chiffre de Hill) : K inversible modulo $n \Leftrightarrow \det K$ premier avec n .

Correction de l'exercice 1 - Circuit électrique

a) Nœud : $I_1 = I_2 + I_3$. Maille générateur- R_1 - R_2 : $E = R_1 I_1 + R_2 I_2$. Maille R_2 - R_3 (même tension) : $R_2 I_2 = R_3 I_3$.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_1 + 3I_2 = 12 \\ 3I_2 - 6I_3 = 0 \end{cases}$$

b) La troisième donne $I_2 = 2I_3$, la première $I_1 = 3I_3$; la deuxième : $6I_3 + 6I_3 = 12$, $I_3 = 1$ A.

— $I_1 = 3$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 1$ A.

c) $R_2 \parallel R_3 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \, \Omega$; $R_{\text{eq}} = 2 + 2 = 4 \, \Omega$; $I_1 = \frac{12}{4} = 3$ A ✓

d) $P = RI^2$: $R_1 : 2 \times 9 = 18$ W ; $R_2 : 3 \times 4 = 12$ W ; $R_3 : 6 \times 1 = 6$ W. Total 36 W, égal à $EI_1 = 12 \times 3 = 36$ W ✓

Réponse. $I_1 = 3$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 1$ A ; puissances $18 + 12 + 6 = 36$ W.

Correction de l'exercice 2 - Réseau de circulation

a) Entrées = sorties en chaque nœud :

$$\begin{cases} x_4 + 500 = x_1 + 200 \\ x_1 + 100 = x_2 + 300 \\ x_2 + 200 = x_3 + 400 \\ x_3 + 300 = x_4 + 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 300 \\ x_1 - x_2 = 200 \\ x_2 - x_3 = 200 \\ x_3 - x_4 = -100 \end{cases}$$

b) La somme des quatre équations donne $0 = 0$: l'une est redondante. Avec $x_4 = t$: $x_1 = 300 + t$, $x_2 = 100 + t$, $x_3 = t - 100$; vérification de la dernière : $(t - 100) - t = -100$ ✓. Rang 3.

c) $x_3 \geq 0$ impose $t \geq 100$ (les autres contraintes sont alors satisfaites). Minimum : $x_4 = 100$, et alors $x_1 = 400$.

— Solution « minimale » : $(400, 200, 0, 100)$: le tronçon CD peut être vide.

d) Le total entrant ($500 + 100 + 200 + 300 = 1\,100$) égale le total sortant ($1\,100$) : cette **conservation globale** est la somme des quatre équations, qui ne sont donc pas indépendantes. Physiquement, on peut ajouter un même flux t qui « tourne » dans le rond-point sans changer les bilans.

Réponse. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (300 + t, 100 + t, t - 100, t)$, $t \geq 100$; minimum $x_4 = 100$, $x_1 = 400$.

Correction de l'exercice 3 - Modèle de Leontief

a) La production x_E d'énergie sert à la demande finale (100) et aux consommations intermédiaires : $0,2x_E$ (secteur énergie) et $0,3x_I$ (industrie). D'où $x_E = 0,2x_E + 0,3x_I + 100$, et de même $x_I = 0,4x_E + 0,1x_I + 50$.

b) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$, de déterminant $0,72 - 0,12 = 0,6$:

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{0,6} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

— $X = (1,5 \times 100 + 0,5 \times 50, \frac{2}{3} \times 100 + \frac{4}{3} \times 50) = (175, 133,3)$.

— **Vérification** : $0,2 \times 175 + 0,3 \times 133,3 + 100 \approx 35 + 40 + 100 = 175$ ✓

c) Le coefficient (i, j) est la production du secteur i nécessaire pour livrer 1 € de demande finale au secteur j , **effets indirects compris** : 1 € d'énergie livré exige 1,5 € d'énergie produite.

d) Par linéarité : $\Delta X = (I_2 - A)^{-1}(10, 0) = (15, 6,67)$. L'énergie augmente de 15 et l'industrie de 6,7 (millions d'euros).

Réponse. $X = (175; 133,3)$; $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$; hausse $(15; 6,7)$.

Correction de l'exercice 4 - Loi stationnaire d'une chaîne de Markov

a) $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ (ligne = état de départ). Par la formule des probabilités totales :

$\pi'_A = 0,9\pi_A + 0,5\pi_B$, $\pi'_B = 0,1\pi_A + 0,5\pi_B$, c'est-à-dire $\pi' = \pi P$.

b) $\pi_A = 0,9\pi_A + 0,5\pi_B$, soit $0,1\pi_A = 0,5\pi_B$:

$$\begin{cases} 0,1\pi_A - 0,5\pi_B = 0 \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \pi = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

c) $P - I$ n'est pas inversible (ses lignes somment à 0) : le système homogène a une infinité de solutions (une droite). La **normalisation** $\pi_A + \pi_B = 1$ choisit la bonne.

d) $\pi_1 = (0,45 + 0,25, 0,05 + 0,25) = (0,7; 0,3)$;
 $\pi_2 = (0,63 + 0,15, 0,07 + 0,15) = (0,78; 0,22)$.

— On se rapproche de $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \approx (0,833; 0,167)$: l'écart est multiplié par 0,4 chaque mois ($0,9 - 0,5$, valeur propre de P autre que 1).

Réponse. $\pi = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$; $\pi_1 = (0,7; 0,3)$, $\pi_2 = (0,78; 0,22)$.

Correction de l'exercice 5 - Équilibrer une réaction d'oxydoréduction

a) Atomes de chaque côté :

$$\begin{cases} a = c & (\text{K}) \\ a = d & (\text{Mn}) \\ 4a = e & (\text{O}) \\ b = 2e & (\text{H}) \\ b = c + 2d + 2f & (\text{Cl}) \end{cases}$$

b) On exprime tout en fonction de a : $c = d = a$, $e = 4a$, $b = 8a$. La dernière :

$$8a = a + 2a + 2f, \text{ donc } f = \frac{5a}{2}, \text{ soit } a = \frac{2f}{5}.$$

— $(a, b, c, d, e) = f\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right)$ (confirmé par échelonnement exact). Rang 5, une inconnue libre.

c) $f = 5$: $a = 2$, $b = 16$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 8$.



d) K : $2 = 2$; Mn : $2 = 2$; O : $8 = 8$; H : $16 = 16$; Cl : $16 = 2 + 4 + 10$ ✓

Réponse. $2 \text{KMnO}_4 + 16 \text{HCl} \rightarrow 2 \text{KCl} + 2 \text{MnCl}_2 + 8 \text{H}_2\text{O} + 5 \text{Cl}_2$.

Correction de l'exercice 6 - Température stationnaire d'une plaque

a) a a pour voisins : le bord haut (100), le bord gauche (0), b et c . Donc :

$$\begin{cases} 4a = 100 + b + c \\ 4b = 100 + a + d \\ 4c = a + d \\ 4d = b + c \end{cases}$$

b) Le problème est symétrique par rapport à l'axe vertical : par unicité de la solution, $a = b$ et $c = d$. Il reste $3a - c = 100$ et $3c = a$.

— $9c - c = 100$, soit $c = 12,5$; puis $a = 37,5$.

c) $4 \times 37,5 = 150 = 100 + 37,5 + 12,5$ ✓ ; $4 \times 12,5 = 50 = 37,5 + 12,5$ ✓ (et les deux autres par symétrie).

d) $\frac{37,5 + 37,5 + 12,5 + 12,5}{4} = 25$: c'est la moyenne des quatre bords ($\frac{100 + 0 + 0 + 0}{4}$).

Par symétrie, le problème « un bord à 100 » tourné de quart de tour en quart de tour, additionné, donne le problème « tous les bords à 100 », dont la solution est 100 partout ; chaque configuration contribue donc en moyenne pour 25 (principe de **superposition**).

Réponse. $a = b = 37,5$ °C, $c = d = 12,5$ °C.

Correction de l'exercice 7 - Équilibre d'une masse suspendue

a) Horizontalement, les composantes s'équilibrent ; verticalement, elles compensent le poids :

$$\begin{cases} T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ \\ T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 = \frac{1}{2} T_2 \\ \frac{1}{2} T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 = 100 \end{cases}$$

b) $T_2 = \sqrt{3} T_1$; on reporte : $\frac{1}{2} T_1 + \frac{3}{2} T_1 = 100$, $T_1 = 50$ N, $T_2 = 50\sqrt{3} \approx 86,6$ N.

c) Oui ici, mais pas en général : le câble le plus **vertical** porte le plus.

d) $T_1 = T_2 = T$ et $2T \sin \alpha = 100 : T = \frac{50}{\sin \alpha}$.

— Quand $\alpha \rightarrow 0$, $T \rightarrow +\infty$: on ne peut pas tendre un câble parfaitement horizontal sous une charge. Le déterminant du système, $2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$, tend vers 0 : le système devient **singulier**.

Réponse. $T_1 = 50 \text{ N}$, $T_2 = 50\sqrt{3} \approx 86,6 \text{ N}$; cas symétrique $T = \frac{50}{\sin \alpha} \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 8 - Prix des billets

a)
$$\begin{cases} 2a + 3e + s = 54 \\ a + 2e + 2s = 44 \\ 3a + e + s = 52 \end{cases}$$
 ; déterminant (calcul exact) : $10 \neq 0$: solution unique.

b) $L_3 - L_1 : a - 2e = -2$; $L_2 - 2L_1 : -3a - 4e = -64$. Avec $a = 2e - 2$:
 $-6e + 6 - 4e = -64$, $e = 7$, $a = 12$, puis $s = 54 - 24 - 21 = 9$.

— Adulte 12 €, enfant 7 €, senior 9 €. **Vérification** : $12 + 14 + 18 = 44 \checkmark$;
 $36 + 7 + 9 = 52 \checkmark$

c) On cherche $(2, 2, 2) = \lambda(2, 3, 1) + \mu(1, 2, 2) + \nu(3, 1, 1)$, puis le prix $54\lambda + 44\mu + 52\nu$.

— Composante par composante (adultes, enfants, seniors) : $2\lambda + \mu + 3\nu = 2$,
 $3\lambda + 2\mu + \nu = 2$, $\lambda + 2\mu + \nu = 2$. La différence des deux dernières donne $\lambda = 0$, puis
 $\mu + 3\nu = 2$ et $2\mu + \nu = 2 : \mu = \frac{4}{5}$, $\nu = \frac{2}{5}$.

— Prix : $44 \times \frac{4}{5} + 52 \times \frac{2}{5} = 35,2 + 20,8 = 56 \text{ €}$, et avec les prix unitaires
 $2 \times (12 + 7 + 9) = 56 \text{ €} \checkmark$

d) Deux équations, trois inconnues : une droite de prix possibles ; on ne pourrait pas conclure (sauf pour les groupes combinaisons des deux premiers).

Réponse. Adulte 12 €, enfant 7 €, senior 9 € ; quatrième groupe : 56 €.

Correction de l'exercice 9 - Mélange d'alliages

a)
$$\begin{cases} 0,6x + 0,2y + 0,4z = 44 \\ 0,3x + 0,5y + 0,4z = 38 \\ 0,1x + 0,3y + 0,2z = 18 \end{cases}$$

b) $\frac{A+B}{2} = (40\%, 40\%, 20\%) = C$: la troisième colonne est la demi-somme des deux premières. Rang ≤ 2 , déterminant nul.

c) Échelonnement (calcul exact) : rang 2, compatible, et

$$x = 60 - \frac{z}{2}, \quad y = 40 - \frac{z}{2}, \quad z \text{ libre}$$

— **Vérification** $z = 0$: $(60, 40, 0)$: cuivre $36 + 8 = 44 \checkmark$; zinc $18 + 20 = 38 \checkmark$; étain
 $6 + 12 = 18 \checkmark$

d) $x, y, z \geq 0$ impose $z \leq 80$. Solutions : $z \in [0; 80]$, avec masse totale $x + y + z = 100 \text{ kg}$ (toujours).

— Maximum d'alliage C : $z = 80$, $x = 20$, $y = 0$. Remplacer 2 kg de (1 kg de A + 1 kg de B) par 2 kg de C ne change rien au résultat : c'est l'origine de l'infinité de solutions.

Réponse. $x = 60 - \frac{z}{2}$, $y = 40 - \frac{z}{2}$, $0 \leq z \leq 80$; maximum de C : $(20, 0, 80)$.

Correction de l'exercice 10 - Chiffre de Hill

a) « HI » = (7, 8). $KX = (3 \times 7 + 3 \times 8, 2 \times 7 + 5 \times 8) = (45, 54) \equiv (19, 2) \pmod{26}$, soit « TC ».

b) $\det K = 15 - 6 = 9$, et $9 \wedge 26 = 1$: 9 est inversible modulo 26, donc K aussi.

c) $9 \times 3 = 27 \equiv 1$: $9^{-1} \equiv 3$. Avec la formule de l'inverse 2×2 :

$$K^{-1} \equiv 3 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

d) $K^{-1}(19, 2) = (15 \times 19 + 17 \times 2, 20 \times 19 + 9 \times 2) = (319, 398) \equiv (7, 8)$, soit « HI » ✓ ($319 = 12 \times 26 + 7$, $398 = 15 \times 26 + 8$).

— **Leçon** : le pivot de Gauss fonctionne dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ à condition de ne diviser que par des nombres **inversibles** modulo 26 ; une matrice de déterminant pair ou multiple de 13 serait inutilisable.

Réponse. « HI » $\rightarrow$ « TC » ; $\det K = 9$; $K^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 - Ajustement d'une tendance

a) $a = 2$, $a + b = 3$, $a + 2b = 5$, $a + 3b = 6$: les deux premières donnent $b = 1$, incompatible avec la troisième.

b) Avec $n = 4$, $\sum t = 6$, $\sum t^2 = 14$, $\sum y = 16$, $\sum ty = 0 + 3 + 10 + 18 = 31$:

$$\begin{cases} 4a + 6b = 16 \\ 6a + 14b = 31 \end{cases}$$

— $a = 4 - 1,5b$, puis $24 - 9b + 14b = 31$, $b = 1,4$ et $a = 1,9$. Droite : $y = 1,9 + 1,4t$.

c) Valeurs ajustées : 1,9 ; 3,3 ; 4,7 ; 6,1. Résidus : 0,1 ; -0,3 ; 0,3 ; -0,1 (somme nulle ✓). Somme des carrés : $0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,01 = 0,2$.

d) $y(5) = 1,9 + 7 = 8,9$ milliers.

— C'est une **extrapolation** : fiable seulement si la tendance linéaire persiste ; les résidus faibles décrivent le passé, pas l'avenir.

Réponse. $y = 1,9 + 1,4t$; somme des carrés des résidus 0,2 ; prévision 8,9 en $t = 5$.

Correction de l'exercice 12 - Cercle circonscrit

a) $\Omega A^2 = \Omega B^2$: $x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + y^2$, soit $8x = 16$: les termes carrés **s'éliminent**.

— $\Omega A^2 = \Omega C^2$: $x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$, soit $2x + 6y = 10$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

b) $x = 2$, $y = 1$: centre $\Omega(2, 1)$, rayon $\Omega A = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

— **Vérification** : $\Omega B^2 = 4 + 1 = 5$ ✓ ; $\Omega C^2 = 1 + 4 = 5$ ✓

c) $x = 2$ est la médiatrice de $[AB]$; $x + 3y = 5$ est la médiatrice de $[AC]$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$, passant par le milieu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$: $\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$ ✓).

d) Si A, B, C sont alignés, les deux médiatrices sont **parallèles** (distinctes si les points sont distincts) : système incompatible, pas de cercle circonscrit.

Réponse. Centre $\Omega(2, 1)$, rayon $\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 13 - Régime alimentaire

$$\text{a) } \begin{cases} 10q_1 + 20q_2 + 5q_3 = 60 \\ 20q_1 + 10q_2 + 40q_3 = 120 \\ 5q_1 + 10q_2 + 5q_3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2q_1 + 4q_2 + q_3 = 12 \\ 2q_1 + q_2 + 4q_3 = 12 \text{ (en divisant par 5, 10 et 5).} \\ q_1 + 2q_2 + q_3 = 7 \end{cases}$$

b) $L_1 - L_2 : 3q_2 - 3q_3 = 0$, donc $q_2 = q_3$. $L_1 - 2L_3 : -q_3 = -2$, donc $q_3 = 2$, $q_2 = 2$, puis $q_1 = 7 - 4 - 2 = 1$.

$$(q_1, q_2, q_3) = (1, 2, 2)$$

— Soit 100 g d'aliment 1, 200 g de chacun des deux autres.

c) Oui, toutes positives. **Vérification** : protéines $10 + 40 + 10 = 60 \checkmark$; glucides $20 + 20 + 80 = 120 \checkmark$; lipides $5 + 20 + 10 = 35 \checkmark$

d) Nouveau second membre $(12, 12, 4)$: $q_2 = q_3$ reste vrai ; $L_1 - 2L_3 : -q_3 = 4$, $q_3 = -4 < 0$. Solution **mathématique** unique mais **irréalisable** : l'objectif est incompatible avec les aliments disponibles.

Réponse. $(q_1, q_2, q_3) = (1, 2, 2)$: 100 g, 200 g, 200 g ; avec 20 g de lipides : $q_3 < 0$, irréalisable.

Correction de l'exercice 14 - Somme de puissances par un système

a) $S_1 = 1, S_2 = 9, S_3 = 36, S_4 = 100$:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 9 \\ 81a + 27b + 9c + 3d = 36 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = 100 \end{cases}$$

b) Le pivot (calcul exact) donne $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = 0$.

— Par exemple : on élimine d avec $L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1, L_4 - 4L_1$: $14a + 6b + 2c = 7$, $78a + 24b + 6c = 33$, $252a + 60b + 12c = 96$, puis on continue.

$$\text{c) } \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \checkmark$$

d) $n = 10 : 55^2 = 3025$, et $1 + 8 + 27 + \dots + 1000 = 3025 \checkmark$

— **Remarque** : la somme des cubes est le **carré** de la somme des entiers.

$$\text{Réponse. } S_n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : chaîne de Markov à trois états

a) $\pi M = \pi$ donne, colonne par colonne :

$$\begin{cases} -0,5\pi_S + 0,2\pi_N + 0,1\pi_P = 0 \\ 0,3\pi_S - 0,4\pi_N + 0,3\pi_P = 0 \\ 0,2\pi_S + 0,2\pi_N - 0,4\pi_P = 0 \end{cases}$$

b) La somme des trois équations est nulle (chaque ligne de M somme à 1) : rang 2. On garde les deux premières et on ajoute $\pi_S + \pi_N + \pi_P = 1$.

c) Première (multipliée par 10) : $-5\pi_S + 2\pi_N + \pi_P = 0$; deuxième : $3\pi_S - 4\pi_N + 3\pi_P = 0$.

— De la première, $\pi_P = 5\pi_S - 2\pi_N$; dans la deuxième : $3\pi_S - 4\pi_N + 15\pi_S - 6\pi_N = 0$, soit $\pi_N = \frac{9}{5}\pi_S$, puis $\pi_P = 5\pi_S - \frac{18}{5}\pi_S = \frac{7}{5}\pi_S$.

— Normalisation : $\pi_S \left(1 + \frac{9}{5} + \frac{7}{5} \right) = \frac{21}{5} \pi_S = 1 :$

$$\pi = \left(\frac{5}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21} \right) \approx (0,238; 0,429; 0,333)$$

— **Vérification** (troisième équation) : $0,2 \times \frac{5}{21} + 0,2 \times \frac{9}{21} - 0,4 \times \frac{7}{21} = \frac{1 + 1,8 - 2,8}{21} = 0 \checkmark$

d) $365 \times \frac{1}{3} \approx 122$ jours de pluie par an.

Réponse. $\pi = \left(\frac{5}{21}, \frac{9}{21}, \frac{7}{21} \right) ;$ environ 122 jours de pluie par an.