

Plaque 2 - Opérations élémentaires, Gauss-Jordan et calcul matriciel

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations élémentaires sur les lignes (toutes réversibles) :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ (permutation) ; $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ (dilatation) ; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, i \neq j$ (transvection).
- Chacune revient à multiplier A à **gauche** par une matrice élémentaire E (obtenue en faisant l'opération sur I_n), et E est inversible : le système $EAX = EB$ a les **mêmes solutions** que $AX = B$.

Forme échelonnée réduite : pivots égaux à 1, seuls non nuls de leur colonne. Le **rang** est le nombre de pivots.

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I_n \mid A^{-1}) \quad \text{si } A \text{ est inversible}$$

- **Décomposition LU** : si l'échelonnement se fait sans échange, $A = LU$ avec L triangulaire inférieure (des 1 sur la diagonale, les multiplicateurs dessous) et U triangulaire supérieure.
- **Cramer** : si $\det A \neq 0$, $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$ où A_k est A avec la colonne k remplacée par B .
- **Coût** du pivot pour n équations : environ $\frac{2n^3}{3}$ opérations ; une remontée triangulaire : environ n^2 .

Correction de l'exercice 1 - Forme échelonnée réduite et rang

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : (0 \ 0 \ 3 \ -6)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : (0 \ 0 \ 3 \ -6)$; puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: ligne nulle.

— Forme échelonnée : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On divise L_2 par 3 puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\text{rref}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Deux pivots : **rang** 2, colonnes pivots 1 et 3.

c) Inconnues principales x, z ; secondaires y, t (libres). Le système réduit donne $x = -2y - t$ et $z = 2t$.

— Solutions : $(x, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 2, 1)$, $y, t \in \mathbb{R}$: un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (dimension $4 - 2 = 2$).

d) $y = 0, t = 1 : (-1, 0, 2, 1)$. Ligne 1 : $-1 + 0 - 2 + 3 = 0 \checkmark$; ligne 2 : $-2 + 0 + 2 + 0 = 0 \checkmark$; ligne 3 : $-1 + 0 + 4 - 3 = 0 \checkmark$

Réponse. Rang 2 ; solutions $y(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 2, 1)$.

Correction de l'exercice 2 - Matrices élémentaires

a) On applique l'opération à I_3 :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— Deuxième ligne de EA : $-2(1, 0, 1) + (2, 1, 0) = (0, 1, -2)$ ✓

b) L'opération inverse est $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$: $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Contrôle** : $EE^{-1} = I_3$ (le coefficient $(2, 1)$ vaut $-2 + 2 = 0$).

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; échanger deux fois revient à ne rien faire : $P^2 = I_3$, $P^{-1} = P$.

— $D = \text{diag}(1, 5, 1)$ et $D^{-1} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{5}, 1\right)$.

d) AE agit sur les **colonnes** : c'est l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$.

— $AE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (première colonne : $(1, 2, 0) - 2(0, 1, 1)$).

— **À retenir** : matrice élémentaire à gauche = opération sur les lignes ; à droite = opération sur les colonnes.

Réponse. $E = I_3 - 2E_{21}$, $E^{-1} = I_3 + 2E_{21}$; $P^2 = I_3$; à droite : opération sur les colonnes.

Correction de l'exercice 3 - Décomposition LU

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ (multiplicateur 2) et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ (multiplicateur 4) : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Puis

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ (multiplicateur 3) :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Produit LU : ligne 2 : $2(2, 1, 1) + (0, 1, 1) = (4, 3, 3)$ ✓ ; ligne 3 :

$4(2, 1, 1) + 3(0, 1, 1) + (0, 0, 2) = (8, 7, 9)$ ✓

c) Descente $LY = B$: $y_1 = 4$; $2y_1 + y_2 = 10$, $y_2 = 2$; $4y_1 + 3y_2 + y_3 = 24$, $y_3 = 2$.

— **Remontée** $UX = Y$: $2x_3 = 2$, $x_3 = 1$; $x_2 + x_3 = 2$, $x_2 = 1$; $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1 = 1$.

— $X = (1, 1, 1)$. **Vérification** : $2 + 1 + 1 = 4$, $4 + 3 + 3 = 10$, $8 + 7 + 9 = 24$ ✓

d) L'échelonnement (le coûteux, environ $\frac{2}{3}n^3$ opérations) n'est fait **qu'une fois** ; chaque nouveau second membre ne demande qu'une descente et une remontée, environ $2n^2$ opérations. Pour $n = 1\,000$: $6,7 \times 10^8$ contre 2×10^6 .

Réponse. $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $X = (1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Formules de Cramer

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ (Vandermonde en 1, 2, 3). Par le pivot : $L_2 - L_1 = (0, 1, 2)$,

$L_3 - L_1 = (0, 3, 8)$, puis $(0, 0, 2) : \Delta = 1 \times 1 \times 2 = 2$.

b) On remplace successivement chaque colonne par $B = (6, 14, 36) :$

$$x = \frac{\det A_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad y = \frac{\det A_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2, \quad z = \frac{\det A_3}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3$$

— (Les trois déterminants 3×3 se calculent comme Δ ; résultats confirmés par calcul exact.)

— **Vérification** : $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 4 + 9 = 14$, $1 + 8 + 27 = 36$ ✓

c) Pivot : $y + 2z = 8$, $3y + 8z = 30$, d'où $2z = 30 - 24 = 6$, $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$. **Un seul** échelonnement contre **quatre** déterminants pour Cramer.

d) Calculer un déterminant $n \times n$ par développement coûte de l'ordre de $n!$ opérations ; Cramer en demande $n + 1$. Pour $n = 20$, $20! \approx 2,4 \times 10^{18}$ contre $\frac{2}{3} \times 20^3 \approx 5\,300$ pour le pivot. Cramer sert pour les **raisonnements** (formules explicites, dépendance en un paramètre) et les petits systèmes.

Réponse. $\Delta = 2$; $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 5 - Coût du pivot de Gauss

a) $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$: 1 division. $x_{n-1} : 1$ multiplication et 1 division. $x_k : n - k$ multiplications et 1 division, soit $n - k + 1$.

$$\sum_{k=1}^n (n - k + 1) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Sous le k -ième pivot, il y a $n - k$ lignes à traiter. Pour chacune : 1 division (multiplicateur) puis $n - k$ multiplications sur les coefficients restants et 1 sur le second membre, soit $n - k + 1$. Total $(n - k)(n - k + 1)$.

c) Avec $j = n - k :$

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) = \sum j^2 + \sum j = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \approx \frac{n^3}{3}.$$

— En comptant aussi les additions, on retrouve le chiffre classique $\approx \frac{2n^3}{3}$ opérations.

d) $\frac{2}{3} \times (10^4)^3 = \frac{2}{3} \times 10^{12}$ opérations, soit environ 670 secondes, un peu plus de 11 minutes.

— Doubler n multiplie le temps par 8 : c'est le sens de « complexité **cubique** ». Pour des systèmes creux (beaucoup de zéros, voir l'exercice tridiagonal), on fait bien mieux.

Réponse. Remontée $\frac{n(n+1)}{2}$; échelonnement $\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \approx \frac{n^3}{3}$ multiplications ; $n = 10^4$: environ 11 minutes.

Correction de l'exercice 6 - Pivot partiel et erreurs d'arrondi

a) Par soustraction : $(1 - \varepsilon)x = 1$, donc

$$x = \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad y = 2 - x = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

— Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $x \approx 1 + \varepsilon$ et $y \approx 1 - \varepsilon$. Les deux inconnues valent environ 1.

- b)** $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\varepsilon} L_1 : \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)y = 2 - \frac{1}{\varepsilon}$, puis $x = \frac{1-y}{\varepsilon}$ par la première équation.
- c)** $\frac{1}{\varepsilon} = 10^{20}$. En arithmétique à 16 chiffres, $2 - 10^{20}$ et $1 - 10^{20}$ sont tous deux arrondis à -10^{20} : la machine trouve $y = 1$.
- Puis $x = \frac{1-1}{10^{-20}} = 0$, alors que la vraie valeur est ≈ 1 . L'erreur minuscule sur y (de l'ordre de 10^{-20}) est **divisée par ε** , donc amplifiée d'un facteur 10^{20} .
- d)** Avec les lignes échangées, le pivot est 1 : $L_2 \leftarrow L_2 - \varepsilon L_1$ donne $(1 - \varepsilon)y = 1 - 2\varepsilon$, arrondi en $y = 1$; puis $x = 2 - y = 1$.
- Le résultat est correct à 10^{-16} près. **Règle** : on choisit toujours le pivot de plus grande valeur absolue dans la colonne ; diviser par un petit pivot amplifie les erreurs.
- Réponse.** $x = \frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1$; pivot ε : la machine donne $x = 0$; pivot partiel : $x \approx 1, y \approx 1$.

Correction de l'exercice 7 - Deux seconds membres à la fois

- a)** $a + bx_i + cx_i^2 = y_i$ pour $x_i = 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- b)** Matrice $\left(\left(\begin{array}{ccc|ccc} ccc & cc1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & & 3 & 9 & 1 & 10 \end{array} \right) \right)$ traitée en une seule passe :

- $L_2 - L_1 : (0 \ 1 \ 3 \mid 1 \ 3)$; $L_3 - L_1 : (0 \ 2 \ 8 \mid 1 \ 8)$; $L_3 - 2L_2 : (0 \ 0 \ 2 \mid -1 \ 2)$.
- Premier cas : $c = -\frac{1}{2}$, $b = 1 - 3c = \frac{5}{2}$, $a = 0 - b - c = -2$.
- Second cas : $c = 1$, $b = 3 - 3 = 0$, $a = 2 - 0 - 1 = 1$.
- c)** $y = -2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2$: en 1 : $-2 + 2,5 - 0,5 = 0 \checkmark$; en 2 : $-2 + 5 - 2 = 1 \checkmark$; en 3 : $-2 + 7,5 - 4,5 = 1 \checkmark$
- $y = 1 + x^2 : 2, 5, 10 \checkmark$
- d)** Les points $(1, 2), (2, 5), (3, 10)$ sont sur $y = x^2 + 1$; par unicité (trois points d'abscisses distinctes), c'est la parabole cherchée.
- **Méthode** : on peut échelonner avec autant de colonnes de seconds membres qu'on veut, pour le prix d'un seul échelonnement.
- Réponse.** $(a, b, c) = \left(-2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $(1, 0, 1)$.

Correction de l'exercice 8 - Système 4×4 et interpolation cubique

a)
$$\begin{cases} a + b + c + d = 10 \\ a - b + c - d = -2 \\ a + 2b + 4c + 8d = 49 \\ a - 2b + 4c - 8d = -11 \end{cases}$$

- b)** Sommes et différences (combinaisons de lignes, qui préservent les solutions) :

$$\begin{cases} 2a + 2c = 8 \\ 2a + 8c = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + 2d = 12 \\ 4b + 16d = 60 \end{cases}$$

- La partie **paire** $a + cx^2$ et la partie **impaire** $bx + dx^3$ se séparent.

c) Pair : $a + c = 4$ et $a + 4c = 19$, d'où $3c = 15$, $c = 5$, $a = -1$. Impair : $b + d = 6$ et $b + 4d = 15$, d'où $3d = 9$, $d = 3$, $b = 3$.

$$P = -1 + 3x + 5x^2 + 3x^3$$

d) $P(1) = -1 + 3 + 5 + 3 = 10 \checkmark$; $P(-1) = -1 - 3 + 5 - 3 = -2 \checkmark$;
 $P(2) = -1 + 6 + 20 + 24 = 49 \checkmark$; $P(-2) = -1 - 6 + 20 - 24 = -11 \checkmark$

— **Méthode** : repérer une **symétrie** du système divise le travail (deux systèmes 2×2 au lieu d'un 4×4).

Réponse. $P = 3x^3 + 5x^2 + 3x - 1$.

Correction de l'exercice 9 - Matrice non inversible et noyau

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne une **ligne nulle** ; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : (0, -1, -2)$. Après échange :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{deux pivots, } \mathbf{rang} \ 2 < 3 : K \text{ n'est pas inversible.}$$

b) $-y - 2z = 0$ donne $y = -2z$; $x + 2y + 3z = 0$ donne $x = 4z - 3z = z$.

$$\ker K = \{z(1, -2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

— **Vérification** : $1 - 4 + 3 = 0$, $2 - 8 + 6 = 0$, $1 - 2 + 1 = 0 \checkmark$

c) On échelonne la matrice augmentée : la deuxième ligne devient $(0 \ 0 \ 0 \mid b_2 - 2b_1)$. Le système est compatible si et seulement si $b_2 = 2b_1$.

d) $B = (1, 2, 0)$ vérifie $b_2 = 2b_1$. Solution particulière avec $z = 0$: $x + 2y = 1$ et $x + y = 0$, d'où $y = 1$, $x = -1$.

— **Solutions** : $(-1, 1, 0) + z(1, -2, 1)$, $z \in \mathbb{R}$: solution particulière + noyau.

Réponse. Rang 2 ; $\ker K = \mathbb{R}(1, -2, 1)$; compatible $\Leftrightarrow b_2 = 2b_1$;

$$X = (-1, 1, 0) + z(1, -2, 1).$$

Correction de l'exercice 10 - Inverse d'une matrice triangulaire

a) T est déjà échelonnée avec trois pivots égaux à 1 : rang 3, inversible ($\det T = 1$).

b) Sur $(T \mid I_3)$: $L_2 \leftarrow L_2 - cL_3 : (0 \ 1 \ 0 \mid 0 \ 1 \ -c)$; $L_1 \leftarrow L_1 - bL_3 : (1 \ a \ 0 \mid 1 \ 0 \ -b)$; puis $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c)} \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (car } ac - b = 8 - 3 = 5).$$

— Coefficient $(1, 3)$ de TT^{-1} : $1 \times 5 + 2 \times (-4) + 3 \times 1 = 0 \checkmark$; coefficient $(1, 2)$: $-2 + 2 = 0 \checkmark$; $(2, 3)$: $-4 + 4 = 0 \checkmark$

d) Pour une triangulaire supérieure à pivots non nuls, Gauss-Jordan n'utilise que des dilatations et des transvections $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ avec $j > i$. Appliquées à I_n , elles ne créent des coefficients qu'**au-dessus** de la diagonale : T^{-1} est triangulaire supérieure.

$$\mathbf{Réponse.} \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \text{ en c) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 11 - Système tridiagonal et équation différentielle

a) $-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 1$ donne $2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = h^2 = \frac{1}{25}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} U = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par symétrie du problème, $u_1 = u_4$ et $u_2 = u_3$; les équations 1 et 2 donnent :

$$2u_1 - u_2 = \frac{1}{25}, \quad -u_1 + u_2 = \frac{1}{25}$$

— En additionnant : $u_1 = \frac{2}{25}$, puis $u_2 = \frac{3}{25}$. Le pivot complet (calcul exact) donne bien $U = \frac{1}{25}(2, 3, 3, 2)$.

c) $u(0,2) = \frac{0,2 \times 0,8}{2} = 0,08 = \frac{2}{25} \checkmark$; $u(0,4) = \frac{0,4 \times 0,6}{2} = 0,12 = \frac{3}{25} \checkmark$

— Les valeurs sont **exactes** : pour un polynôme de degré ≤ 3 , l'approximation $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2}$ de u'' est exacte (développement de Taylor).

d) Chaque ligne n'a que deux coefficients non nuls à éliminer ou à propager : l'élimination sous chaque pivot touche une seule ligne et deux coefficients. Coût total proportionnel à n (**algorithme de Thomas**), contre n^3 en général.

Réponse. $U = \frac{1}{25}(2, 3, 3, 2)$, égal à la solution exacte $\frac{x(1-x)}{2}$ aux nœuds ; coût linéaire en n .

Correction de l'exercice 12 - Condition de compatibilité géométrique

a) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : (0, -2, 1 \mid -1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 : (0, -2, 1 \mid \lambda - 2)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 :$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y + z = -1 \\ 0 = \lambda - 1 \end{cases}$$

b) Si $\lambda \neq 1$: dernière équation impossible, **aucune** solution. Si $\lambda = 1$: rang 2, une inconnue libre, **infinité** de solutions.

c) Les vecteurs normaux $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(2, 0, 3)$ sont liés :

$(2, 0, 3) = (1, 1, 1) + (1, -1, 2)$. Les trois plans sont parallèles à une même droite.

— $\lambda \neq 1$: les plans se coupent deux à deux selon trois droites parallèles distinctes (« prisme ») ; $\lambda = 1$: P_3 contient la droite $P_1 \cap P_2$, les trois plans ont une **droite commune**.

d) $\lambda = 1, z = t$ libre : $y = \frac{1+t}{2}, x = 1 - y - z = \frac{1-3t}{2}$.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

— **Vérification** ($t = 1$) : $(-1, 1, 1) : P_1 : 1 \checkmark$; $P_2 : -1 - 1 + 2 = 0 \checkmark$; $P_3 : -2 + 3 = 1 \checkmark$

Réponse. $\lambda \neq 1$: aucune solution (prisme) ; $\lambda = 1$: droite $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Correction de l'exercice 13 - Inverse d'une matrice 2×2

a) $L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1$ (autorisé : $a \neq 0$, c'est une combinaison inversible) donne $(0 \mid ad - bc \mid -c \mid a)$.

— Si $ad - bc = 0$, il y a une ligne nulle à gauche : rang 1, **non inversible**. Si $ad - bc \neq 0$, deux pivots : inversible.

b) On termine : $L_2 \leftarrow \frac{L_2}{ad - bc}$ donne $\left(0 \ 1 \mid \frac{-c}{\Delta} \ \frac{a}{\Delta}\right)$ avec $\Delta = ad - bc$; puis $L_1 \leftarrow \frac{L_1 - bL_2}{a}$ donne la première ligne $\left(\frac{d}{\Delta}, \frac{-b}{\Delta}\right)$ (calcul : $\frac{1}{a}\left(1 + \frac{bc}{\Delta}\right) = \frac{d}{\Delta}$).

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

c) Si $a = 0$, on **échange** les lignes (pivot c) si $c \neq 0$; si $a = c = 0$, la première colonne est nulle et $\det = 0$: non inversible. La formule reste valable.

d) $\det = m(m + 1) - 6 = m^2 + m - 6 = (m + 3)(m - 2)$: inversible si et seulement si $m \notin \{-3, 2\}$.

— $m = 0$: $\det = -6$, $A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. **Contrôle** : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}$: ligne 1 : $(1, 0) \checkmark$; ligne 2 : $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 1\right) \checkmark$

Réponse. Inversible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$; $m \notin \{-3, 2\}$; pour $m = 0$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 14 - Opérations sur les colonnes : attention

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$: $-2y = -4$, donc $y = 2$, puis $x = 5 - 4 = 1$. $X = (1, 2)$.

b) L'opération sur les colonnes revient à multiplier A à droite par $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: il résout $(AE)X' = B$, avec $AE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

— $AEX' = B$ et $AX = B$: par unicité (A inversible), $X = EX'$, c'est-à-dire $x = x' - 2y'$, $y = y'$.

c) $AEX' = B$: $x' = 5$, $3 \times 5 - 2y' = 11$, $y' = 2$. Donc $X = EX' = (5 - 4, 2) = (1, 2) \checkmark$

— Sa réponse brute $(5, 2)$ est **fausse** comme solution du système de départ ($5 + 4 = 9 \neq 5$).

d) Sur les **lignes** (équations) : toutes les opérations élémentaires, sans précaution. Sur les **colonnes** : cela change les inconnues ; seule la permutation de colonnes est d'usage courant, en renumérotant les inconnues. Le rang, lui, est préservé par les deux.

Réponse. $X = (1, 2)$; l'opération sur les colonnes résout pour $X' = E^{-1}X = ((5, 2))$, à retransformer par $X = EX'$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la matrice de Hilbert

a) $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$: $\left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$; $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1$: $\left(0, \frac{1}{12}, \frac{4}{45}\right)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $\left(0, 0, \frac{4}{45} - \frac{1}{12}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{180}\right)$.

$$\det H = 1 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{180} = \frac{1}{2160}$$

b) Première ligne de H fois colonnes de H^{-1} : $9 - 18 + 10 = 1 \checkmark$; $-36 + 96 - 60 = 0 \checkmark$; $30 - 90 + 60 = 0 \checkmark$

c) $B_1 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (somme de chaque ligne : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, etc.), donc $X_1 = (1, 1, 1)$.

— $X_2 = X_1 + H^{-1} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 1) + 0,01 \times (9, -36, 30) = (1,09; 0,64; 1,30)$.

— Une perturbation de 0,01 sur **une** donnée change la solution de 0,36 : un facteur d'amplification de 36.

d) $\det H$ est **minuscule** et H^{-1} a de **grands** coefficients : de petites erreurs sur B sont fortement amplifiées. Pour l'ordre 10, le facteur dépasse 10^{13} : en arithmétique à 16 chiffres, il ne reste que 2 ou 3 chiffres exacts. Un système peut être inversible et pourtant **impossible à résoudre précisément** en pratique.

Réponse. $\det H = \frac{1}{2160}$; $X_1 = (1, 1, 1)$, $X_2 = (1,09; 0,64; 1,30)$: amplification d'un facteur 36.