

Plaquette 3 - Structure de l'ensemble des solutions

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Système $AX = B$ à p équations et n inconnues, $r = \text{rg}(A)$.

- **Homogène** ($B = 0$) : l'ensemble des solutions $\ker A$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$; une base s'obtient en donnant la valeur 1 à une inconnue secondaire et 0 aux autres.
- **Structure affine** : si X_0 est une solution, toutes les solutions sont les $X_0 + Y$ avec $AY = 0$.
- **Superposition** : si $AX_1 = B_1$ et $AX_2 = B_2$, alors $A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda B_1 + \mu B_2$.

$$S = X_0 + \ker A, \quad \dim \ker A = n - \text{rg}(A)$$
- **Compatibilité** : $AX = B$ a une solution si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A , c'est-à-dire $B \in \text{Im} A$; les **lignes nulles** de la forme échelonnée donnent les équations cartésiennes de $\text{Im} A$.
- **Si** $n > p$, un système homogène a toujours une solution non nulle.
- **Moindres carrés** : si $AX = B$ est incompatible, X minimisant $\|AX - B\|$ vérifie les **équations normales** $A^T A X = A^T B$.

Correction de l'exercice 1 - Sous-espace affine de solutions

a) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $y + 2z + 3t = 6$, donc $y = 6 - 2z - 3t$. Puis $x = 4 - y - z - t = -2 + z + 2t$.

b) On sépare la partie constante et les parties en z et t :

$$(x, y, z, t) = (-2, 6, 0, 0) + z(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1)$$

— On pose $X_0 = (-2, 6, 0, 0)$, $U = (1, -2, 1, 0)$ et $V = (2, -3, 0, 1)$.

c) X_0 : $-2 + 6 = 4 \checkmark$ et $-2 + 12 = 10 \checkmark$

— U : $1 - 2 + 1 = 0 \checkmark$ et $1 - 4 + 3 = 0 \checkmark$; V : $2 - 3 + 1 = 0 \checkmark$ et $2 - 6 + 4 = 0 \checkmark$

d) Rang 2, 4 inconnues : **plan affine** de dimension $4 - 2 = 2$ dans $\mathbb{R}^4$.

— Autre solution : $(1, 1, 1, 1)$ ($1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10 \checkmark$). Différence :
 $(1, 1, 1, 1) - X_0 = (3, -5, 1, 1) = U + V \checkmark$ ($z = t = 1$).

— **Leçon** : la solution particulière n'est pas unique, mais l'ensemble $X_0 + \ker A$ l'est.

Réponse. $S = (-2, 6, 0, 0) + \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$, plan affine.

Correction de l'exercice 2 - Principe de superposition

a) $x + y = 2$, $x - y = 0$: $X_1 = (1, 1)$. $x + y = 0$, $x - y = 2$: $X_2 = (1, -1)$.

b) Par linéarité du produit matriciel :

$$A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda A X_1 + \mu A X_2 = \lambda B_1 + \mu B_2$$

— Une combinaison des seconds membres donne la **même** combinaison des solutions.

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} B_1 + \frac{5}{2} B_2$, donc $X = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{5}{2}(1, -1) = (4, -1)$.

— **Vérification** : $4 - 1 = 3 \checkmark$ et $4 + 1 = 5 \checkmark$

d) Les lois de Kirchhoff forment un système linéaire dont les seconds membres sont les tensions des générateurs : le courant total est $I_1 + I_2$. C'est le **théorème de superposition** des électriciens.

— **Limite** : la superposition ne vaut que pour des systèmes **linéaires** ; elle est fautive pour un second membre qui interviendrait dans la matrice.

Réponse. $X_1 = (1, 1)$, $X_2 = (1, -1)$; $X = \frac{3}{2}X_1 + \frac{5}{2}X_2 = (4, -1)$.

Correction de l'exercice 3 - Équation redondante et paramètres libres

a) $L_2 - L_1 = (1, 2, 2, 1, 0 \mid 4) = L_3$: la troisième équation n'apporte **aucune** information.

b) Forme échelonnée réduite (calculée exactement) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

— Rang 2 ; inconnues principales x_1, x_3 ; secondaires x_2, x_4, x_5 .

c) $x_1 = 2 - 2x_2 + x_4 - 2x_5$ et $x_3 = 1 - x_4 + x_5$:

— $X = (2, 0, 1, 0, 0) + x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_4(1, 0, -1, 1, 0) + x_5(-2, 0, 1, 0, 1)$.

d) Trois paramètres : $\dim \ker A = n - r = 5 - 2 = 3 \checkmark$

— **Vérification** de $X_0 = (2, 0, 1, 0, 0)$: $2 + 1 = 3 \checkmark$; $4 + 3 = 7 \checkmark$; $2 + 2 = 4 \checkmark$

— **Piège** : compter 3 équations et conclure « $5 - 3 = 2$ paramètres » est faux ; seul le **rang** compte.

Réponse. Rang 2 ; $X = (2, 0, 1, 0, 0) + x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_4(1, 0, -1, 1, 0) + x_5(-2, 0, 1, 0, 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Droite : paramétrique et cartésienne

a) $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \exists t, \overrightarrow{AM} = tu$:

$$x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 2 - t$$

b) De la première, $t = x - 1$; on reporte : $y = 2x - 2$ et $z = 3 - x$.

— $D: \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ (deux plans dont l'intersection est D).

c) Rang 2, une inconnue libre, disons $x = s$: $y = 2s - 2$, $z = 3 - s$, soit $(0, -2, 3) + s(1, 2, -1)$.

— On retrouve la direction u ; le point $(0, -2, 3)$ est **un autre point** de D (pour $t = -1$). La représentation paramétrique n'est pas unique.

d) $M(3, 4, 0)$: $6 - 4 = 2 \checkmark$ et $3 + 0 = 3 \checkmark$: $M \in D$ (c'est $t = 2$).

— $N(0, -2, 4)$: $0 + 2 = 2 \checkmark$ mais $0 + 4 = 4 \neq 3$: $N \notin D$.

— **Méthode** : pour tester l'appartenance, la forme **cartésienne** est la plus rapide ; pour produire des points, la forme **paramétrique**.

Réponse. $D: 2x - y = 2, x + z = 3$; $M \in D, N \notin D$.

Correction de l'exercice 5 - Plan : éliminer deux paramètres

a) $(1 + s, 1 + t, s + t) = (1, 1, 0) + s(1, 0, 1) + t(0, 1, 1)$. Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires : P est un **plan**.

b) $(x, y, z) \in P$ si et seulement si le système $s = x - 1, t = y - 1, s + t = z$ (inconnues s, t) est compatible. On reporte les deux premières dans la troisième :

$$(x - 1) + (y - 1) = z \Leftrightarrow x + y - z = 2$$

c) Un vecteur normal est orthogonal aux deux directeurs : (a, b, c) avec $a + c = 0$ et $b + c = 0$, par exemple $(1, 1, -1)$. Le plan passe par $(1, 1, 0)$: $x + y - z = 1 + 1 - 0 = 2$ ✓

d) $(u, u, u) \in P \Leftrightarrow u + u - u = 2 \Leftrightarrow u = 2$. Intersection : le point $(2, 2, 2)$.

— **Vérification** paramétrique : $s = t = 1$ donne $(2, 2, 2)$ ✓

— **Méthode** : éliminer les paramètres, c'est écrire la **condition de compatibilité** ; chaque paramètre éliminé « consomme » une équation.

Réponse. $P: x + y - z = 2$; intersection avec la diagonale : $(2, 2, 2)$.

Correction de l'exercice 6 - Appartenance à un sous-espace engendré

a) On cherche α, β avec $\alpha u_1 + \beta u_2 = v$: système $\alpha + 2\beta = 5$, $\beta = 2$, $\alpha + 3\beta = 7$.

— $\beta = 2$, $\alpha = 1$, et la troisième équation : $1 + 6 = 7$ ✓ **Compatible** : $v = u_1 + 2u_2$.

b) $\alpha + 2\beta = 1$, $\beta = 1$, $\alpha + 3\beta = 1$: $\alpha = -1$, puis $-1 + 3 = 2 \neq 1$. **Incompatible** : $w \notin F$.

c) Pour $b = (x, y, z)$: $\beta = y$, $\alpha = x - 2y$, et la dernière équation impose

$$(x - 2y) + 3y = z \Leftrightarrow z = x + y$$

— **Contrôle** : $u_1 : 1 = 1 + 0$ ✓ ; $u_2 : 3 = 2 + 1$ ✓ ; $v : 7 = 5 + 2$ ✓ ; $w : 1 \neq 2$ ✓

d) $4 = 1 + m$, donc $m = 3$.

— **Méthode** : « $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ » est un problème de **compatibilité** d'un système dont les colonnes sont les u_i .

Réponse. $v = u_1 + 2u_2 \in F$; $w \notin F$; $F: z = x + y$; $m = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Plus d'inconnues que d'équations

a) Après échelonnement, il y a au plus p pivots, donc $r \leq p < n$: au moins $n - r \geq 1$ inconnue secondaire. En lui donnant la valeur 1, on obtient une solution **non nulle**.

b) $P = a + bX + cX^2 + dX^3$: $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ donne 3 équations homogènes à 4 inconnues : il existe une solution non nulle.

$$a = 0, \quad b + c + d = 0, \quad 2b + 4c + 8d = 0$$

— On obtient $c = -3d$, $b = 2d$: $P = d(X^3 - 3X^2 + 2X) = dX(X - 1)(X - 2)$ ✓ (logique : racines 0, 1, 2).

c) Une relation $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_4 v_4 = 0$ est un système homogène de 3 équations (une par coordonnée) à 4 inconnues : il a une solution non nulle, donc les vecteurs sont **liés**.

d) Non : $x + y + z = 1$ et $x + y + z = 2$ n'a aucune solution. L'argument de a) ne vaut que pour un système homogène (qui a toujours au moins la solution nulle).

Réponse. Solution non nulle si $n > p$; $P = X(X - 1)(X - 2)$; 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont liés ; un système non homogène peut être incompatible.

Correction de l'exercice 8 - Systèmes équivalents

a) S_1 : en additionnant, $2x = 4$, $x = 2$, $y = 1$. S_2 : $x = 2$, $3y = 3$, $y = 1$. Même unique solution $(2, 1)$: **équivalents**.

b) $2x = 4$ est $L_1 + L_2$; $x + 3y = 5$ est $2L_1 - L_2$ (car $2x + 2y - x + y = x + 3y$ et $6 - 1 = 5$ ✓).

— Réciproquement, en notant L_1', L_2' les équations de S_2 : $L_1 = \frac{1}{3}L_1' + \frac{1}{3}L_2'$ ($\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + y = x + y$ et $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$ ✓) et $L_2 = \frac{2}{3}L_1' - \frac{1}{3}L_2'$.

c) $2x + 2y = 4$ est le double de $x + y = 2$: mêmes solutions, **équivalents**.

— $x + y = 2$ (droite) et $x - y = 0$ (autre droite) : ensembles différents (par exemple $(2, 0)$ est solution du premier seulement). **Non équivalents** : avoir le même **nombre** de solutions ne suffit pas.

d) Une opération élémentaire remplace les équations par des combinaisons des anciennes (donc toute solution de l'ancien système est solution du nouveau), et elle est **réversible** (donc l'inverse aussi) : les deux ensembles de solutions sont égaux.

Réponse. $S_1 = S_2$ (solution $(2, 1)$) ; mêmes combinaisons dans les deux sens ; même nombre de solutions ne suffit pas.

Correction de l'exercice 9 - Solutions entières d'un système

a) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 20 \end{cases} \cdot L_2 - L_1 : y + 2z = 10, \text{ donc } y = 10 - 2z, \text{ puis } x = 10 - y - z = z.$

$$(x, y, z) = (0, 10, 0) + z(1, -2, 1), \quad z \in \mathbb{R}$$

b) Il faut $x = z \geq 0$ et $y = 10 - 2z \geq 0$, avec z entier : $z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

— Solutions : $(0, 10, 0), (1, 8, 1), (2, 6, 2), (3, 4, 3), (4, 2, 4), (5, 0, 5)$.

c) **Six** compositions. Le plus de pièces de 2 € : $(0, 10, 0)$, dix pièces de 2 €.

— **Vérification** $(3, 4, 3)$: 10 pièces ✓ et $3 + 8 + 9 = 20$ € ✓

d) La condition $x = z$ est **automatiquement** vérifiée : elle n'apporte rien (elle est conséquence des deux autres). Il reste six compositions.

— **Leçon** : l'ensemble réel des solutions est une droite ; les contraintes « entiers naturels » en sélectionnent un **nombre fini** de points.

Réponse. $(x, y, z) = (z, 10 - 2z, z), z \in \{0, \dots, 5\}$: 6 compositions.

Correction de l'exercice 10 - Moindres carrés

a) $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$: les deux premières donnent $a = 1, b = 1$, et la troisième $1 + 2 = 3 \neq 4$.

Incompatible : les points ne sont pas alignés.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

— $3a + 3b = 7$ et $3a + 5b = 10$: $2b = 3, b = \frac{3}{2}$, puis $a = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$. Droite : $y = \frac{5}{6} + \frac{3}{2}x$.

c) Valeurs ajustées : $\frac{5}{6}, \frac{7}{3}, \frac{23}{6}$. Résidus $y_i - \hat{y}_i$: $\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$; somme 0 ✓

d) La solution minimise $\sum_i (y_i - a - bx_i)^2 = \|AX - B\|^2$, la somme des carrés des écarts **verticaux**. C'est la droite de **régression** des statisticiens ; elle passe par le point moyen $(1, \frac{7}{3})$ ✓ $(\frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3})$.

Réponse. Système incompatible ; équations normales $3a + 3b = 7, 3a + 5b = 10$; droite $y = \frac{5}{6} + \frac{3}{2}x$.

Correction de l'exercice 11 - Base du noyau

a) $L_2 - 2L_1 : (0, -1, -1, -1)$; $L_3 - L_1 : (0, -1, -1, -1)$, identique : $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne une ligne nulle. Réduite :

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}A = 2$$

b) $x = -z - 2t$, $y = -z - t$. Avec $(z, t) = (1, 0)$ puis $(0, 1)$:

— $\ker A = \text{Vect}((-1, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$; ces vecteurs sont libres (troisième et quatrième coordonnées).

— **Vérification** de $(-2, -1, 0, 1)$: $-2 - 1 + 3 = 0 \checkmark$; $-4 - 1 + 5 = 0 \checkmark$; $-2 + 2 = 0 \checkmark$

c) $4 = \text{rg}A + \dim \ker A = 2 + 2 \checkmark$

d) La même élimination sur le second membre : $L_2 - 2L_1$ donne 0, $L_3 - L_1$ donne 0, et la ligne nulle a pour second membre 0 : **compatible**.

— Solution particulière : $(1, 0, 0, 0)$ (première colonne de A). Solutions : $(1, 0, 0, 0) + \ker A$.

Réponse. Rang 2 ; $\ker A = \text{Vect}((-1, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$; $AX = (1, 2, 1)$: $(1, 0, 0, 0) + \ker A$.

Correction de l'exercice 12 - Équations cartésiennes de l'image

a) Les deux colonnes $(1, 1, 2, 0)$ et $(1, 2, 3, 1)$ ne sont pas colinéaires : **rang 2**.

b) Avec $X = (\alpha, \beta)$: $\alpha + \beta = b_1$, $\alpha + 2\beta = b_2$, $2\alpha + 3\beta = b_3$, $\beta = b_4$.

— La dernière donne $\beta = b_4$, la première $\alpha = b_1 - b_4$. On reporte dans les deux autres :

$$b_2 = b_1 + b_4, \quad b_3 = 2b_1 + b_4$$

c) $\text{Im}A = \{B : b_2 - b_1 - b_4 = 0, b_3 - 2b_1 - b_4 = 0\}$: deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^4$, dimension $4 - 2 = 2$, égale au rang $\checkmark$

d) $(3, 5, 8, 2)$: $5 = 3 + 2 \checkmark$ et $8 = 6 + 2 \checkmark$: dans l'image, avec $\beta = 2$, $\alpha = 1$.

— $(1, 1, 1, 1)$: $1 \neq 1 + 1 \times$: pas dans l'image, le système $AX = (1, 1, 1, 1)$ est incompatible.

— **Méthode** : le nombre d'équations cartésiennes de l'image est $p - \text{rg}A$ (nombre de lignes nulles de la forme échelonnée).

Réponse. Rang 2 ; $\text{Im}A : b_2 = b_1 + b_4, b_3 = 2b_1 + b_4$; $(3, 5, 8, 2) \in \text{Im}A$, $(1, 1, 1, 1) \notin$.

Correction de l'exercice 13 - Solutions non triviales et valeurs propres

a) Un système carré homogène a une solution non nulle si et seulement si sa matrice n'est **pas inversible** (sinon $X = M^{-1}0 = 0$), c'est-à-dire si son déterminant est nul.

b) $\det(A - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2 - 1 = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 3\}$$

c) $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0$, soit $x + y = 0$: base $(1, -1)$.

— $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = 0$, soit $x = y$: base $(1, 1)$.

— Pour les autres λ , seule la solution nulle.

d) $(1, -1)$ et $(1, 1)$ ne sont pas colinéaires : base de $\mathbb{R}^2$.

— $A(1, -1) = (1, -1)$ et $A(1, 1) = (3, 3) = 3(1, 1)$: A **multiplie** ces vecteurs par 1 et 3. Ce sont des **vecteurs propres** ; ce calcul, qui n'est qu'un système homogène à paramètre, est la base de la diagonalisation.

Réponse. $\lambda \in \{1, 3\}$; bases $(1, -1)$ et $(1, 1)$; $A(1, -1) = (1, -1)$, $A(1, 1) = 3(1, 1)$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un système à partir de deux solutions

a) $A(X_2 - X_1) = AX_2 - AX_1 = B - B = 0$: $X_2 - X_1 = (1, 0, -2) \in \ker A$.

b) Rang 2 et 3 inconnues : $\dim \ker A = 1$, donc $\ker A = \text{Vect}(1, 0, -2)$. Par la structure affine :

$$S = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2), \quad t \in \mathbb{R}$$

c) On cherche deux équations vérifiées par les points de S : $y = 2$ (constant), et, avec $x = 1 + t$, $z = 3 - 2t$: $z = 3 - 2(x - 1)$, soit $2x + z = 5$.

— Système : $\begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$, de rang 2. **Vérification** : X_1 : $2 + 3 = 5$ ✓ ; X_2 : $4 + 1 = 5$ ✓

— (D'autres systèmes conviennent : toute combinaison inversible de ces deux équations.)

d) $(0, 2, 5)$: $y = 2$ ✓ et $0 + 5 = 5$ ✓ : solution ($t = -1$). $(3, 2, 0)$: $6 + 0 = 6 \neq 5$: pas solution.

Réponse. $S = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2)$; système $y = 2$, $2x + z = 5$; $(0, 2, 5) \in S$, $(3, 2, 0) \notin S$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : polynômes sous contraintes linéaires

a) $P(0) = a = 0$ et $\int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$.

b) $a = 0$ et $b = 2 - \frac{2c}{3}$; c libre :

$$P = 2X + c\left(X^2 - \frac{2}{3}X\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

— Solution particulière $2X$ ($\int_0^1 2t dt = 1$ ✓) plus le noyau engendré par $X^2 - \frac{2}{3}X$ ($P(0) = 0$ et $\int_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ✓) : une **droite affine**.

c) $P(1) = 2 + c\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{c}{3} = 0$, donc $c = -6$:

$$P = 2X - 6X^2 + 4X = 6X - 6X^2 = 6X(1 - X).$$

— Parabole nulle en 0 et 1, maximale en $\frac{1}{2}$ (valeur 1,5), d'aire 1 sous la courbe : c'est une **densité de probabilité** sur $[0; 1]$.

d) $P'(0) = b = 0$ impose $2 - \frac{2c}{3} = 0$, soit $c = 3$: $P = 3X^2$. **Unique.**

— **Vérification** : $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $\int_0^1 3t^2 dt = 1$ ✓

— **Leçon** : chaque condition linéaire indépendante fait baisser d'un la dimension de l'ensemble des solutions ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$).

Réponse. $P = 2X + c\left(X^2 - \frac{2}{3}X\right)$; avec $P(1) = 0$: $6X(1 - X)$; avec $P'(0) = 0$: $3X^2$.