

Plaquette 4 – Systèmes à paramètres : discussions complètes

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Système carré $AX = B$ de taille n :

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{solution unique} \Leftrightarrow \text{rg} A = n$$

- Si $\det A = 0$: aucune solution **ou** une infinité ; on décide en échelonnant la matrice augmentée $(A | B)$.
- **Théorème de Rouché-Fontené** : compatible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A | B)$; alors les solutions forment un espace affine de dimension $n - \text{rg} A$.
- **Cramer** (cas $\det A \neq 0$) : $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$; pratique quand les coefficients dépendent d'un paramètre.

Méthode de discussion.

- Calculer $\det A$ (ou échelonner) en **factorisant** l'expression en le paramètre.
- Cas général : paramètre hors des racines. Cas particuliers : remplacer, puis échelonner à nouveau.
- **Piège** : de $(m - 1)x = m^2 - 1$, on ne tire $x = m + 1$ **que si** $m \neq 1$; pour $m = 1$, l'équation est $0 = 0$.
- **Homogène carré** : solution non nulle $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Correction de l'exercice 1 - Le système symétrique classique

a) On ajoute toutes les colonnes à la première : elle devient $(m + 2, m + 2, m + 2)$, qu'on factorise :

$$\det = (m + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m + 2) \left(-(m - 1)^2 \right)$$

- (Le déterminant restant, après $L_1 - L_3$ et $L_2 - L_3$, vaut $\begin{vmatrix} 0 & 0 & m - 1 \\ 0 & m - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(m - 1)^2$.)

Contrôle numérique : $m = 0$ donne -2 ✓ ; $m = 3$ donne -20 ✓

b) Si $m \notin \{1, -2\}$: solution unique. La somme des équations donne $(m + 2)(x + y + z) = 3$, et le système est invariant par permutation des inconnues, donc (unicité) $x = y = z$:

$$x = y = z = \frac{1}{m + 2}$$

- **Vérification** : $\frac{1 + 1 + m}{m + 2} = 1$ ✓

c) $m = 1$: les trois équations sont $x + y + z = 1$: un **plan** de solutions, $(1 - y - z, y, z)$.

- $m = -2$: la somme donne $0 = 3$: **aucune** solution.

d) Tableau :

m	det	Solutions
$m \notin \{1, -2\}$	$\neq 0$	unique : $\left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$
$m = 1$	0	plan $x + y + z = 1$
$m = -2$	0	aucune

Réponse. $\det = -(m-1)^2(m+2)$; $m \notin \{1, -2\}$: $x = y = z = \frac{1}{m+2}$; $m = 1$: plan ; $m = -2$: aucune solution.

Correction de l'exercice 2 - Paramètres dans le second membre

a) $L_2 - L_1 = (1, -1, 2) = L_3$ (pour les coefficients). Le rang de la matrice est $2 < 3$: **jamais** de solution unique.

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : (0, -3, 3 \mid b - 2a)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : (0, -3, 3 \mid c - a)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : (0, 0, 0 \mid c - b + a)$.

$$\text{compatible} \Leftrightarrow c = b - a$$

c) Si $c = b - a$: $-3y + 3z = b - 2a$, donc $y = z + \frac{2a-b}{3}$; puis $x = a - 2y + z = -z + \frac{2b-a}{3}$.

— Solutions : $\left(\frac{2b-a}{3}, \frac{2a-b}{3}, 0\right) + z(-1, 1, 1)$: une **droite**.

d) $(1, 5, 4) : 4 = 5 - 1 \checkmark$ compatible : $(3, -1, 0) + z(-1, 1, 1)$. **Vérification** en $z = 0$: $3 - 2 = 1 \checkmark$, $6 - 1 = 5 \checkmark$, $3 + 1 = 4 \checkmark$

— $(1, 5, 5) : 5 \neq 4$: **incompatible**.

Réponse. Compatible $\Leftrightarrow c = b - a$; solutions $\left(\frac{2b-a}{3}, \frac{2a-b}{3}, 0\right) + z(-1, 1, 1)$.

Correction de l'exercice 3 - Un paramètre qui ne change pas la solution

a) $\det = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$: racines ± 1 .

b) Si $a \neq \pm 1$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a - a}{a^2 - 1} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 - 1} = 1$$

— La solution $(0, 1)$ **ne dépend pas** de a !

c) $a = 1$: les deux équations sont $x + y = 1$: une droite de solutions, qui contient $(0, 1)$.

— $a = -1$: $-x + y = 1$ et $x - y = -1$, la même droite : une infinité de solutions, dont $(0, 1)$.

— Contrairement à l'exercice précédent, les cas singuliers donnent ici une **infinité** de solutions (et non aucune).

d) Toutes les droites de la famille passent par le point fixe $(0, 1)$: pour $a \neq \pm 1$, deux droites distinctes sécantes en $(0, 1)$; pour $a = \pm 1$, deux droites **confondues**.

Réponse. $\det = a^2 - 1$; pour $a \neq \pm 1$: $(0, 1)$; pour $a = \pm 1$: une droite de solutions contenant $(0, 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Paramètre donnant des solutions non nulles

a) $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)X = 0$. Solution non nulle $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$:

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

— $\lambda \in \{4, -1\}$.

b) $\lambda = 4 : \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X = 0$, soit $3x = 2y$: solutions $t(2, 3)$.

— $\lambda = -1 : \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X = 0$, soit $x = -y$: solutions $t(1, -1)$.

c) $A(2, 3) = (2 + 6, 6 + 6) = (8, 12) = 4(2, 3) \checkmark$;
 $A(1, -1) = (1 - 2, 3 - 2) = (-1, 1) = -1 \cdot (1, -1) \checkmark$

d) Pour $\lambda \notin \{4, -1\}$, $A - \lambda I_2$ est inversible, donc $X = (A - \lambda I_2)^{-1} 0 = 0$.

Réponse. $\lambda \in \{4, -1\}$; solutions $t(2, 3)$ pour $\lambda = 4$ et $t(1, -1)$ pour $\lambda = -1$.

Correction de l'exercice 5 - Rang d'une matrice à paramètre

a) $L_2 - L_1 : (0, 1, 2, 3)$; $L_3 - L_1 : (0, 2, 4, m - 1)$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 : (0, 0, 0, m - 7)$.

b) Si $m \neq 7$: trois pivots (colonnes 1, 2, 4) : **rang** 3. Si $m = 7$: la dernière ligne est nulle : **rang** 2.

c) Pour $m = 7$: on a fait $L_3 - L_1 - 2(L_2 - L_1) = 0$, c'est-à-dire $L_3 = 2L_2 - L_1$.

— **Vérification** : $2(1, 2, 3, 4) - (1, 1, 1, 1) = (1, 3, 5, 7) \checkmark$

d) $\dim \ker M_m = 4 - \text{rg} M_m$:

$$m \neq 7 : \dim = 1, \quad m = 7 : \dim = 2$$

— **Interprétation** : la quatrième colonne $(1, 4, m)$ est une combinaison des deux premières colonnes, comme la troisième, uniquement pour $m = 7$ (les colonnes $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 7)$ sont en progression arithmétique).

Réponse. $\text{rg} M_m = 3$ si $m \neq 7$, 2 si $m = 7$ (alors $L_3 = 2L_2 - L_1$) ; $\dim \ker = 1$ ou 2.

Correction de l'exercice 6 - Deux paramètres

a) Développement selon la première ligne :

$$\det = (8 - 3a) - (4 - 2a) + (3 - 4) = 3 - a$$

— Contrôle numérique : $a = 0$ donne 3 $\checkmark$; $a = 5$ donne $-2 \checkmark$

b) $a \neq 3$: $\det \neq 0$, **une unique** solution, **quel que soit** b .

c) $a = 3$: $L_2 - L_1 : (0, 1, 2 \mid 1)$; $L_3 - 2L_1 : (0, 1, 2 \mid b - 2)$; $L_3 - L_2 : (0, 0, 0 \mid b - 3)$.

— $b \neq 3$: **aucune** solution ; $b = 3$: **infinité**.

d) $y + 2z = 1$ et $x + y + z = 1$: $y = 1 - 2z$, $x = z$.

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + z(1, -2, 1)$$

— **Vérification** $z = 1$: $(1, -1, 1)$: $1 \checkmark$; $1 - 2 + 3 = 2 \checkmark$; $2 - 3 + 4 = 3 \checkmark$

Cas	Solutions
$a \neq 3$	une unique
$a = 3, b \neq 3$	aucune
$a = 3, b = 3$	une droite

Réponse. $\det = 3 - a$; $a \neq 3$: unique ; $a = 3$: aucune si $b \neq 3$, droite $(0, 1, 0) + z(1, -2, 1)$ si $b = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Le piège des divisions

a) Si $m \neq 1$: on divise par $m - 1 \neq 0$: $x = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = m + 1$.

— Si $m = 1$: l'équation devient $0 \cdot x = 0$: **tout réel** est solution.

b) De $(1 - m^2)y = 0$, il déduit $y = 0$, ce qui suppose $1 - m^2 \neq 0$. Il oublie les cas $m = \pm 1$.

c) Si $m \neq \pm 1$: $y = 0$, $x = 1$ (solution unique).

— $m = 1$: $x + y = 1$ (deux fois) : droite de solutions $(1 - y, y)$.

— $m = -1$: $x - y = 1$ et $-x + y = -1$, même droite : solutions $(1 + y, y)$.

$$\text{Solutions : } \begin{cases} (1, 0) & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \{(1 - y, y)\} & \text{si } m = 1 \\ \{(1 + y, y)\} & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

d) Règle : avant de diviser par une expression $f(m)$, on écrit « si $f(m) \neq 0$ » ; les valeurs qui annulent f se traitent **à part**, en reprenant le système d'origine avec la valeur numérique. C'est la source d'erreur la plus fréquente dans les discussions.

Réponse. $m \neq 1$: $x = m + 1$; $m = 1$: tout réel. Système : $(1, 0)$ si $m \neq \pm 1$, une droite si $m = \pm 1$.

Correction de l'exercice 8 - Interpolation à nœud variable

a) $a = 1$, $a + b + c = 2$, $a + bt + ct^2 = 3$. Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}$, de déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - t = t(t - 1)$$

b) $t \notin \{0, 1\}$: $a = 1$, $b + c = 1$, $bt + ct^2 = 2$. Avec $b = 1 - c$: $t - ct + ct^2 = 2$, d'où $c = \frac{2-t}{t(t-1)}$ et $b = 1 - c$.

c) $t = 0$: $P(0) = 1$ et $P(0) = 3$: **contradiction**, aucune solution. $t = 1$: $P(1) = 2$ et $P(1) = 3$: aucune solution.

— Le déterminant est nul exactement quand deux nœuds **coïncident** ; les conditions sont alors contradictoires (valeurs différentes au même point).

d) $t = 2$: $c = 0$, $b = 1$: $P = 1 + X$; $P(2) = 3$ ✓ (les trois points sont alignés).

— $t = -1$: $c = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$: $P = 1 - \frac{X}{2} + \frac{3}{2}X^2$. $P(1) = 1 - 0,5 + 1,5 = 2$ ✓ ;
 $P(-1) = 1 + 0,5 + 1,5 = 3$ ✓

Réponse. $\det = t(t - 1)$; $t \notin \{0, 1\}$: $a = 1$, $c = \frac{2-t}{t(t-1)}$, $b = 1 - c$; $t \in \{0, 1\}$: aucune solution.

Correction de l'exercice 9 - Cercle passant par trois points

a) En chaque point :

$$O: y = 0, \quad A: 4 + 2\alpha + \gamma = 0, \quad B: m^2 + m\beta + \gamma = 0$$

b) $\gamma = 0$, $\alpha = -2$ et $m\beta = -m^2$.

— Si $m \neq 0$: $\beta = -m$. Si $m = 0$: $B = O$, la troisième équation est $0 = 0$: β **quelconque** (une infinité de cercles passent par deux points).

c) $x^2 - 2x + y^2 - my = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = 1 + \frac{m^2}{4}$.

— Centre $\left(1, \frac{m}{2}\right)$, rayon $\sqrt{1 + \frac{m^2}{4}}$: c'est le milieu de $[AB]$, car l'angle en O est droit ✓

d) Le déterminant du système général est non nul si et seulement si les trois points sont **non alignés** ; s'ils sont alignés (et distincts), le système est incompatible : aucun cercle ne passe par trois points alignés.

Réponse. $m \neq 0$: cercle $x^2 + y^2 - 2x - my = 0$, centre $(1, \frac{m}{2})$, rayon $\sqrt{1 + \frac{m^2}{4}}$; $m = 0$: infinité de cercles.

Correction de l'exercice 10 - Inverse d'une matrice à paramètre

a) $\det A_m = 1 - m^2$: inversible $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

b) Formule de l'inverse 2×2 :

$$A_m^{-1} = \frac{1}{1 - m^2} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

c) $m \neq \pm 1$: $X = \frac{1}{1 - m^2}(1 - m, 1 - m) = \frac{1}{1 + m}(1, 1)$.

— $m = 1$: $x + y = 1$ (deux fois) : droite $(1 - y, y)$.

— $m = -1$: $x - y = 1$ et $-x + y = 1$: **incompatible**.

d) Les coefficients de A_m^{-1} tendent vers l'infini ($1 - m^2 \rightarrow 0$) : le système devient **mal conditionné**. Pourtant la solution de c) reste bornée ($\rightarrow \frac{1}{2}(1, 1)$) : le second membre $(1, 1)$ est « bien placé » (dans l'image de A_1), alors que $(1, -1)$ donnerait une solution qui explose.

Réponse. Inversible $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$; $A_m^{-1} = \frac{1}{1 - m^2} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$; $X = \frac{1}{1 + m}(1, 1)$.

Correction de l'exercice 11 - Droites concourantes

a) En additionnant : $2x = 1 + m$; en soustrayant : $2y = 1 - m$. Point $I_m = (\frac{1+m}{2}, \frac{1-m}{2})$.

b) Concourantes $\Leftrightarrow I_m \in D_3$:

$$(1 + m) + \frac{m(1 - m)}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2m + m - m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

— $(m - 1)(m - 2) = 0$: $m \in \{1, 2\}$.

c) Trois équations à deux inconnues : le système est **surdéterminé** ; il n'a de solution que si la troisième équation est compatible avec les deux premières, c'est-à-dire $\text{rg}(A | B) = \text{rg} A = 2$ (déterminant 3×3 de la matrice augmentée nul).

d) $m = 1$: $I = (1, 0)$; D_3 : $2 + 0 = 2 \checkmark$; $m = 2$: $I = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; D_3 : $3 - 1 = 2 \checkmark$

Réponse. $I_m = (\frac{1+m}{2}, \frac{1-m}{2})$; concourantes pour $m \in \{1, 2\}$.

Correction de l'exercice 12 - Famille de plans et droite fixe

a) $(x, y, z) \in P_m$ pour **tout** $m \Leftrightarrow$ l'égalité $x + z - 1 + my = 0$ est vraie pour tout $m \Leftrightarrow y = 0$ et $x + z = 1$.

$$D = \{(1 - t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

b) $x + my + z = 1$ et $x + m'y + z = 1$: la différence donne $(m - m')y = 0$, donc $y = 0$ (car $m \neq m'$), puis $x + z = 1$: c'est $D \checkmark$

c) $1 + 2m + 3 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$: oui, $P_{-3/2}$.

d) $y = 0$ n'est pas de la forme $x + my + z = 1$; mais c'est un plan contenant D .

- Les plans contenant D sont les $\lambda(x + z - 1) + \mu y = 0$; la famille P_m correspond à $\lambda = 1$, $\mu = m$. Le plan manquant est $\lambda = 0 : y = 0$. C'est le « plan limite » quand $m \rightarrow \infty$ (diviser par m).

Réponse. $D: y = 0, x + z = 1$; $m = -\frac{3}{2}$; le plan $y = 0$ contient D sans être un P_m .

Correction de l'exercice 13 - Résolution par Cramer avec paramètre

$$\text{a) } \det = m^2 - 1. \det_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1+m & m \end{vmatrix} = 2m - 1 - m = m - 1 ;$$

$$\det_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1+m \end{vmatrix} = m + m^2 - 2 = (m-1)(m+2).$$

$$x = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}, \quad y = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1}$$

b) $m \rightarrow 1 : x \rightarrow \frac{1}{2}, y \rightarrow \frac{3}{2}$ (limites finies). $m \rightarrow -1 : |x|$ et $|y|$ tendent vers $+\infty$.

c) $m = 1 : x + y = 2$ (deux fois) : infinité de solutions, droite $x + y = 2$, qui contient $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

— $m = -1 : -x + y = 2$ et $x - y = 0$, soit $y - x = 2$ et $y - x = 0$: **incompatible**.

d) Quand la solution générale a une **limite finie** en une valeur critique, c'est que le système y est compatible (infinité de solutions) ; quand elle **explose**, le système y est incompatible. La factorisation de $\det_x$ et $\det_y$ par $m - 1$ l'annonçait.

Réponse. $x = \frac{1}{m+1}, y = \frac{m+2}{m+1}$; $m = 1$: droite $x + y = 2$; $m = -1$: aucune solution.

Correction de l'exercice 14 - Existence d'un polynôme à racine imposée

$$\text{a) } 1 + a + b + c = 0, -1 + a - b + c = 0, \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

— Somme et différence des deux premières : $a + c = 0$ et $b = -1$. La troisième :

$$\lambda^3 + a\lambda^2 - \lambda - a = 0, \text{ soit } a(\lambda^2 - 1) = -\lambda(\lambda^2 - 1).$$

— Pour $\lambda^2 \neq 1 : a = -\lambda, c = \lambda, b = -1 : P = X^3 - \lambda X^2 - X + \lambda$.

b) Un polynôme unitaire de degré 3 de racines $1, -1, \lambda$ (distinctes) est

$$(X-1)(X+1)(X-\lambda) = (X^2-1)(X-\lambda) = X^3 - \lambda X^2 - X + \lambda \quad \checkmark$$

c) $\lambda = \pm 1$: la troisième équation est **identique** à l'une des deux premières ; il reste $a + c = 0, b = -1$: une **infinité** de solutions $P = X^3 + aX^2 - X - a = (X^2 - 1)(X + a), a \in \mathbb{R}$.

d) $(X^2 - 1)(X + a)$ a 1 pour racine double si $X + a$ s'annule en 1 : $a = -1$,
 $P = (X-1)^2(X+1)$.

— **Leçon** : un système « presque carré » perd une équation quand deux conditions coïncident ; il faut alors une condition supplémentaire (ici la dérivée) pour retrouver l'unicité.

Réponse. $\lambda \neq \pm 1 : P = (X^2 - 1)(X - \lambda)$; $\lambda = \pm 1 : P = (X^2 - 1)(X + a), a$ quelconque ; racine double en 1 : $a = -1$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : système de Vandermonde et formule de Lagrange

a) $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$ (avant modification) transforment le déterminant en

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

— Il est **non nul** car a, b, c sont distincts : solution unique.

b) Pour tout polynôme Q de degré ≤ 2 , on a $Q(d) = Q(a)L_a(d) + Q(b)L_b(d) + Q(c)L_c(d)$ (interpolation de Lagrange, exacte en degré ≤ 2), avec $L_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, etc.

— Avec $Q = 1$, $Q = X$, $Q = X^2$, on obtient exactement les trois équations pour $(x, y, z) = (L_a(d), L_b(d), L_c(d))$. Par unicité, c'est **la** solution.

$$x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

c) $x = \frac{2 \times 1}{(-1)(-2)} = 1$, $y = \frac{3 \times 1}{1 \times (-1)} = -3$, $z = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$.

— **Vérification** : $1 - 3 + 3 = 1 \checkmark$; $1 - 6 + 9 = 4 \checkmark$; $1 - 12 + 27 = 16 \checkmark$

d) Si $a = b$, les deux premières colonnes sont égales : déterminant nul. Le système se réduit à deux inconnues effectives ($x + y$ et z) pour trois équations : en général **incompatible**, compatible seulement si $d \in \{a, c\}$.

Réponse. $\det = (b-a)(c-a)(c-b)$; $x = L_a(d)$, $y = L_b(d)$, $z = L_c(d)$; en c) $(1, -3, 3)$.